Ortogonaalisen ryhmän topologia

Toni Annala

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Ortogonaalisten matriisien ryhmä $O(n)$ koostuu niistä $n \times n$ matriiseista, joiden transpoosi on samalla niiden käänteismatriisi. Esimerkiksi kun $n = 3$, voidaan nämä ajatella yhdeksänulotteisen Eukleidisen avaruuden, $\mathbb{R}^9$ osajoukkona. Tässä kirjoitelmassa on tarkoituksena tarkastella millainen geometrinen objekti ryhmä $O(n)$ on. Koska visualisaatiokykymme ovat rajoittuneet kolmeen ulottuvuuteen, ei tarkastelua voida tehdä aivan suoraan: yhdeksänulotteisen avaruuden osajoukon kuvitteleminen on (ainakin minulle) täysin mahdoton tehtävä.

Ensimmäiseksi karakterisoimme ortogonaalisen ryhmän toisella tavalla. Jos matriisille A pätee $A^T A = I$, niin matriisin sarakevektorit $v_1, ..., v_n$ muodostavat ortonormaalin kannan. Sarakevektorien v_i ja v_j pistetulo on nimittäin

$$v_i \cdot v_j = a_{1i}a_{1j} + ... + a_{ni}a_{nj} = [A^T A]_{ij}.$$

Koska $A^T A = I$, näemme, että $v_i \cdot v_i = 1$ ja $v_i \cdot v_j = 0$ aina kun $i \neq j$. Matriisin ortogonaalisuuden määritelmä on siis vain toinen tapa sanoa, että matriisi lähettää standardikannan $e_1, ..., e_n$ jollekin toiselle ortonormaalille kannalle. Toisaalta tällaiset matriisit ovat tasan ne, jotka määrittelevät isometrisen lineaarikuvauksen, eli lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, joka säilyttää pisteiden väliset etäisyydet.

Propositio 1. *$O(n)$ koostuu tasan niistä $n \times n$ matriiseista, jotka määräävät lineaarisen isometrian.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $A \in O(n)$. Nyt koska A lähettää standardikannan $e_1, ..., e_n$ jollekin toiselle ortonormaalille kannalle, näemme että $Av \cdot Aw = v \cdot w$, eli A säilyttää kaikkien $\mathbb{R}^n$ vektorien v, w väliset pistetulot. Koska euklidinen metriikka voidaan määritellä kaavalla $d(v,w) = \sqrt{(v-w)\cdot(v-w)}$, näemme, että

$$\begin{aligned} d(Av, Aw) &= \sqrt{(Av - Aw)\cdot(Av - Aw)} \\ &= \sqrt{A(v-w)\cdot A(v-w)} \\ &= \sqrt{(v-w)\cdot(v-w)} \\ &= d(v,w). \end{aligned}$$

Joten A on isometria.

Oletetaan sitten, että A on isometrinen. Nyt A lähettää jokaisen standardikannan alkion e_i jollekkin vektorille v_i, jonka pituus on 1. Riittää osoittaa, että nämä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli että $v_i \cdot v_j = 0$, kun $i \neq j$. Isometrisyyden nojalla $d(v_i, v_j) = \sqrt{2}$, joten $(v_i - v_j)\cdot(v_i - v_j) = 2$, josta saamme sisätulon bilinearisuuden ja symmetrisyyden nojalla $v_i \cdot v_i + 2v_i \cdot v_j + v_j \cdot v_j = 2$. Koska $v_i \cdot v_i = 1 = v_j \cdot v_j$, ylläolevasta kaavasta seuraa $v_i \cdot v_j = 0$. Täten A on ortogonaalinen. □

Hyödynnämme yllä olevaa karakterisaatiota myöhemmin, kun karakterisoimme kaikki euklidisen n-avaruuden isometriat.

Koska $\det(A^T) = \det(A)$, näemme ortogonaalisuuden ensimmäisen määritelmän avulla, että $1 = \det(A^T A) = \det(A)^2$. Täten jokaisen ortogonaalisen matriisin determinantti on joko 1 tai -1. Merkitään $SO(n)$ niiden ortogonaalisten matriisien, joiden determinantti on 1, muodostamaa ryhmää. Determinanttikuvauksen jatkuvuudesta seuraa, että $SO(n)$ on ortogonaalisen ryhmän $O(n)$ avoin ja suljettu aliryhmä. Lisäksi, jos g on mikä tahansa ortogonaalinen matriisi, jonka determinantti on -1, indusoi sillä kertominen homeomorfismin $SO(n) \xrightarrow{\sim} O(n)\backslash SO(n)$. Topologisesti $O(n)$ koostuu siis kahden $SO(n)$ isomorfisen kopion erillisestä yhdisteestä. Täten, jotta voimme ymmärtää $O(n)$ topologisesti, riittää meidän ymmärtää millainen topologinen objekti $SO(n)$ on. Myöhemmin huomaamme, että $SO(n)$ on kaikkien $\mathbb{R}^n$ kiertojen muodostama ryhmä. Kierrot ovatkin seuraavan luvun aiheena.

Luku 2

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot

Lineaarialgebran kursseilta tiedämme, millaisia ovat tason kierrot. Ne voidaan esittää matriiseina, jotka ovat muotoa

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

On selvää, että jokainen ylläolevaa muotoa oleva matriisi on ortogonaalinen, ja että kyseisen matriisin determinantti on 1. Olkoon A mikä tahansa ortogonaalinen (2×2)-matriisi, jonka determinantti on 1

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Oletuksista saamme seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Näistä kaavoista voidaan osoittaa, että $a = \pm d$ ja $b = \pm c$. Edelleen voidaan alinta kaavaa käyttäen osoittaa, että $a = d$ ja $b = -c$. Matriisi A on siis muotoa

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix},$$

joten erityisesti pätee $a^2 + c^2 = 1$. Luvun a on oltava välillä $[-1, 1]$, joten on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$, jolla $a = \cos\alpha$. Lisäksi tällöin on pädettävä $c = \pm\sin\alpha$, sillä $c^2 + \cos^2\alpha = 1$. Koska merkin vaihtaminen vaihtaa sinin, muttei kosinin merkkiä, voidaan tarvittaessa vaihtamalla α lukuun $-\alpha$ olettaa, että $a = \cos\alpha$ ja $c = \sin\alpha$. Täten jokainen ortogonaalinen matriisi, jonka determinantti on 1, on kiertomatriisi.

Mitä ovat sitten avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot? Kierron voidaan aina tapahtuvan jonkin tason suhteen: valitaan jokin $\mathbb{R}^n$ lineaarinen kaksiulotteinen aliavaruus V, ja tehdään sille jokin normaali tason kierto, ja pidetään loppu avaruus "niin paikoillaan kuin mahdollista". Yksi tapa tehdä tämä on seuraava: valitaan ensin ortonormaali kanta e_1, e_2 avaruudelle V, ja laajennetaan se koko avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaaliksi kannaksi $e_1, e_2, ..., e_n$. Olkoon A (2×2)-matriisi joka vastaa kulmalla α kiertämistä. Määritellään seuraavanlainen matriisi *lohkomatriisimuodossa*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

missä A on siis (2×2)-matriisi, I on $(n-2)\times(n-2)$ ykkösmatriisi ja 0 ovat nollamatriiseja, joiden koot ovat $2\times(n-2)$ ja $(n-2)\times 2$. Tämä määrittää lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jonka kuvaus alkuperäisen kannan suhteen on $O^{-1}AO$, missä O on jokin ortogonaalinen matriisi (muistetaan, että kannanvaihtomatriisi standardikannasta toiseen ortonormaaliin kantaan on aina ortogonaalinen). Kutsutaan näin saatujen lineaarikuvausten joukkoa $\mathbb{R}^n$ *kierroiksi tason V suhteen.* Ortogonaalisuus säilyy kannanvaihdoissa ortonormaalien kantojen välillä, ja determinantti kaikissa kannanvaihdoissa, joten ylläoleva matriisi määrittelee ryhmän $SO(n)$ alkion.

Herää kysymys: onko tämä joukko hyvin määritelty? Riippuuko se ortonormaalin kannan $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ valinnasta? Olkoon $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ jokin toinen vastaavalla tavalla valittu ortonormaali kanta, ja R lineaarikuvaus, joka on kierto tason V suhteen kannan B' avulla määriteltynä. Ensimmäisenä havaitaan seuraava: R lähettää sekä tason V, että tason V ortokomplementin $V^\perp$ itselleen, ja että jälkimmäisellä R operoi identtisesti (tämä nähdään suoraan tavasta, jolla R konstruoitiin kannan B' suhteen). Nämä faktat eivät riipu kannan valinnasta, joten $Re_i = e_i$ kaikilla $i = 3..n$, ja Re_1 ja Re_2 kuuluvat vektorien e_1 ja e_2 virittämään aliavaruuteen. Nämä faktat yhdistämällä näemme, että R:n esitys kannan B suhteen on oltava muotoa

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

missä A' on jokin (2×2)-matriisi. Enää on osoitettava, että se on kiertomatriisi, eli ortogonaalinen ja sen determinantti on 1. Koska determinantti säilyy kannanvaihdoissa, on ylläolevan matriisin determinantin oltava 1. Ylläolevaa muotoa olevan lohkomatriisin determinantista tiedetän lisäksi, että se on sama kuin $\det(A')\det(I)$, joten $\det(A') = 1$. Tiedetään myös, että A on oltava ortogonaalinen, sillä R määrittelee ortogonaalisen matriisin kannan B' suhteen, ja ortogonaalisuus säilyy ortogonaalisissa kannan vaihdoissa. Täten A' on kiertomatriisi, joten joukkomme ei riipu ortonormaalin kannan valinnasta.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierroiksi nimitämme niiden lineaarikuvausten muodostamaa ryhmää, jonka virittävät kaikki $\mathbb{R}^n$ kierrot tason V suhteen, missä V käy läpi kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaksiulotteiset lineaariset aliavaruudet.

Olkoon v_1 ja v_2 kaksi eri avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikkövektoria, eli S^{n-1} alkiota. Haluaisimme määritellä *suoran kierron*, joka lähettää vektorin v_1 vektorille v_2, eli joka kiertää jossain mielessä suoraa reittiä vektorin v_1 vektorin v_2 paikalle. Kaikissa tilanteissa tällaista yksikäsitteistä ”hyvää valintaa” ei ole olemassa: nimittäin jos $v_2 = -v_1$, on monta tapaa tehdä ”suora kierto” $v_1 \rightsquigarrow v_2$, jotka johtavat erilaisiin lopputuloksiin (lukijaa kehoitetaan miettimään tätä kolmiulotteisessa tapauksessa, vaikkapa pallon avulla). Oletetaan siis, että $v_2 \neq -v_1$. Nyt tiedämme, että vektorien v_1 ja v_2 on oltava lineaarisesti riippumattomia, joten ne virittävät jonkin tason V. Nyt vektoreita v_1 ja v_2 voidaan ajatella tason V yksikköympyrän S^1 alkioina. Tason kiertojen ominaisuuksista tiedetään, että on tasan yksi kierto, joka kiertää vektorin v_1 vektorin v_2 paikalle. Täten on olemassa tasan yksi $\mathbb{R}^n$ kierto tason V suhteen, joka kiertää vektorin v_1 vektorin v_2 paikalle. Kutsumme tätä *suoraksi kierroksi* $v_1 \rightsquigarrow v_2$. Nämä virittävät selvästi kaikki mahdolliset kierrot avaruudelle $\mathbb{R}^n$.

Kun $n = 2$, voidaan suora kierto $v_1 \rightsquigarrow v_2$ määritellä hyvin kaikille vektoripareille v_1, v_2. Tämä johtuu siitä, että $\mathbb{R}^2$ sisältää vain yhden kaksiulotteisen aliavaruuden, joka tässä tapauksessa on koko avaruus $\mathbb{R}^2$, ja täten on vain yksi aliavaruus V, jonka suhteen kiertoja voidaan tehdä. Kuvaus $S^1 \to SO(2)$, joka lähettää yksikkövektorin v suoralle kierrolle $e_1 \rightsquigarrow v$, määrittelee jatkuvan kuvauksen, sillä tämä kuvaus lähettää yksikkövektorin v matriisille

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

missä α on vektorin v vaihekulma. Tämä johtuu siitä, että vaihekulma määrittelee homeomorfismin $S^1 \to \mathbb{R}/\sim$, missä $\sim$ samaistaa kaikki reaaliluvut, jotka eroavat luvun 2π moninkerralla. Täten kuvauksemme $S^1 \to SO(2)$ on jatkuva, ja kompaktien Hausdorff avaruuksien bijektiivisenä kuvauksena homeomorfismi.

Olkoon V jokin $\mathbb{R}^n$ kaksiulotteinen lineaarinen aliavaruus. Nyt $V \cap S^{n-1}$ on tason V yksikköympyrä ja täten homeomorfinen S^1 kanssa. Edellisestä seuraa, että jos kiinnitämme jonkin avaruuden V yksikkövektorin v_0, niin saamme jatkuvan kuvauksen $V \cap S^{n-1} \to SO(2)$, jota voidaan ajatella kiertona $v_0 \rightsquigarrow v$ tasoa V pitkin. Laajennamme seuraavaksi maaliavaruuden joukoksi $SO(n)$. Kiertojen kontruktiota mukaillen valitsemme avaruudelle $\mathbb{R}^n$ ortogonaalisen kannan siten, että ensimmäiset kaksi kannan vektoria virittävät avaruuden V ja loput ovat kohtisuorassa sitä vastaan. Nyt $v \in V \cap S^{n-1}$ lähetetään matriisille

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

missä A on se kiertomatriisi, joka kiertää vektorin v_0 vektorin v paikalle tasolla V. Tämä kuvaus on selvästi jatkuva, sillä $v \mapsto A$ on jatkuva, mutta ryhmän $SO(n)$ matriisit eivät ole esitettynä $\mathbb{R}^n$ standardikannan suhteen. Mutta koska kannanvaihto on jatkuva operaatio, näemme, että saamme jatkuvan kuvauksen $V \cap S^{n-1} \to SO(n)$, missä $SO(n)$ matriisit ovat esitettynä standardikannan suhteen. Edellisen keskustelun voimme tiivistää seuraavaan korollaariin.

Korollaari 2. *Olkoon V jokin $\mathbb{R}^n$ kaksiulotteinen aliavaruus ja v_0 jokin tason V yksikkövektori. Nyt kuvaus $V \cap S^{n-1} \to SO(n)$, joka lähettää vektorin $v \in V \cap S^{n-1}$ sille yksikäsitteiselle kierrolle tason V suhteen, joka kiertää vektorin v_0 vektorin v paikalle, on jatkuva.*

Seuraavaksi käännämme katseemme kohti $\mathbb{R}^n$ isometrisia lineaarikuvauksia, jotka aiemman perusteella siis ovat täsmälleen avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaaliset transformaatiot. Osoitamme, että kaikki tällaiset saadaan esitettyä kiertojen ja erään peilauksen avulla. Merkitään merkillä M_n sitä lineaarikuvausta, joka lähettää $e_i \mapsto e_i$ kaikilla $i < n$ ja $e_n \mapsto -e_n$.

Propositio 3. *Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometrinen lineaarikuvaus. Nyt se on muotoa RM_n tai R, missä R on jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierto.*

Todistus. Koska M_n käänteiskuvaus on se itse, ja koska kiertojen käänteiskuvaukset ovat aina kiertoja, näemme, että riittää löytää kierto R, jolla RA on identtinen kuvaus, tai sitten M_n. Nimittäin jos $RA = I$, niin $A = R^{-1}$ ja jos $M_n RA = I$, niin $A = R^{-1}M_n$.

Merkitään $e_1, ..., e_n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikantaa. Kierrämme ensin vektorien $e_1, ..., e_{n-1}$ kuvat oikeille paikoilleen. Oletetaan, että $i \leq n-1$, ja että $e_1, ..., e_{i-1}$ kuvautuvat kuvauksessa A identtisesti itselleen. Mikäli $Ae_i = e_i$, ei tarvitse tehdä mitään. Toisaalta, jos $Ae_i = -e_i$ niin valitaan jokin vektori v, joka on kohtisuorassa $e_1, ..., e_{i-1}$ virittämää avaruutta vastaan, ja joka on lineaarisesti riippumaton vektorista e_i. Tällainen löytyy aina, sillä vektorien $e_1, ..., e_{i-1}$ virittämän aliavaruuden dimensio on korkeintaan $n-2$. Olkoon V vektorien e_i ja v virittämä taso. Nyt voimme kiertää $-e_i \rightsquigarrow e_i$ tason V suhteen (tämä ei ole suora kierto, mutta sillä ei ole tässä mitään väliä). Koska $e_1, ..., e_{i-1}$ ovat kohtisuorassa tasoa V vastaan, nähdään kiertojen konstruktiosta, että ne pysyvät paikoillaan kierrossa. Eli jos korvaamme kuvauksen A kuvauksella RA, missä R on äsken valittu kierto, saamme kuvauksen, joka kuvaa vektorit $e_1, ..., e_i$ identtisesti itselleen.

Myös viimeinen tapaus, missä $v = Ae_i$ on lineaarisesti riippumaton vektorista e_i, menee yhtä mukavasti. Kuvaus A on ortogonaalinen, joten v on kohtisuorassa vektoreita $Ae_1, ..., Ae_{i-1}$, eli vektoreita $e_1, ..., e_{i-1}$, vastaan, kuten on myös e_i. Täten samalla tavalla kuin ylemmässä päättelyssä, nähdään, että suora kierto $v \rightsquigarrow e_i$ pitää vektorit $e_1, ..., e_{i-1}$ paikallaan. Täten kun korvaame kuvauksen A kuvauksella RA, missä R on äskeinen suora kierto, saamme kuvauksen, joka kuvaa vektorit $e_1, ..., e_i$ identtisesti itselleen.

Ylläolevan päättelyn perusteella saamme kierrot $R_1, ..., R_{n-1}$, siten, että $R_{n-1} \cdots R_1 A$ kuvaa vektorit $e_1, ..., e_{n-1}$ identtisesti itselleen. Koska kiertojen yhdiste on määritelmän mukaan aina kierto, voimme merkitä $R = R_{n-1} \cdots R_1$. Koska RA on ortogonaalinen kuvautuu e_n yksikkövektoriksi joka on kohtisuorassa vektorien $e_1, ..., e_{n-1}$ virittämään aliavaruudeen nähden. Ainoat tällaiset vektorit ovat e_n ja $-e_n$, joten $RA = I$ tai $RA = M_n$, mikä pitikin osoittaa. $\square$

Koska kuvauksen M_n (ja itseasiassa minkä tahansa peilauksen) determinantti on -1 (ja minkä tahansa kierron determinantti 1), seuraa ylläolevasta propositiosta, että $SO(n)$, eli niiden ortogonaalisten $(n \times n)$-matriisien, joiden determinantti on 1, muodostama ryhmä, on täsmälleen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kiertojen muodostama ryhmä.

Luku 3

SO(n) topologisesti

Millainen geometrinen objekti $SO(n)$ on? Tiedämme, että se on jokin $\mathbb{R}^{n^2}$ suljettu osajoukko, mutta tämä ei kovin paljoa auta geometrisen kuvan luomisessa. Tulemme käyttämään hyväksemme sitä faktaa, että $SO(n)$ toimii *transitiivisesti* hyperpallolla S^{n-1}, eli valitaanpa mitkä tahansa kaksi $\mathbb{R}^n$ yksikkövektoria v_1, v_2, on olemassa jokin kierto $A \in SO(n)$, joka lähettää vektorin v_1 vektorille v_2. On myös melko helppoa nähdä, että $SO(n)$ toimii jatkuvasti avaruudella S^{n-1}, eli että kuvaus $SO(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, joka lähettää parin (A, v) alkiolle Av, on jatkuva. Kiinnittämällä jokin S^{n-1} alkio, esimerkiksi e_n, saamme surjektiivisen ja jatkuvan kuvauksen $SO(n) \to S^n$ kaavalla $A \mapsto Ae_n$. Merkitään tätä kuvausta tästälähin symbolilla ρ.

Jos $f : X \to Y$ on mikä tahansa topologisten avaruuksien välinen jatkuva kuvaus ja $y \in Y$, niin kutsumme yksiön $\{y\}$ alkukuvaa $f^{-1}\{y\}$ kuvauksen f *säikeeksi* pisteen y päällä. Tapauksessa, jossa topologinen ryhmä G toimii jatkuvasti ja transitiivisesti topologisella avaruudella X, ja määritellään kuvaus $G \to X$ kuten ρ yllä, saadaan kuvaus, jonka kaikki säikeet ovat topologisesti ekvivalentteja.

Propositio 4. *Olkoon G topologinen ryhmä ja toimikoon se jatkuvasti ja transitiivisesti topologisella avaruudella X. Määritellään jatkuva kuvaus $f : G \to X$ kaavalla $g \mapsto gx_0$, missä x_0 on jokin avaruuden X piste. Nyt kaikki kuvauksen f säikeet ovat keskenään homeomorfisia.*

Todistus. Riittää osoittaa, että millä tahansa $x \in X$ säie $f^{-1}\{x\}$ on homeomorfinen säikeen $f^{-1}\{x_0\}$ kanssa. Olkoon g mikä tahansa ryhmän G alkio, jolle pätee $gx_0 = x$ (transitiivisuuden nojalla tällainen on olemassa). Nyt alkiolla g kertominen määrittelee kuvauksen $f^{-1}\{x_0\} \to f^{-1}\{x\}$: oletetaan, että $f(a) = x_0$, eli $ax_0 = x_0$. Nyt $f(ga) = (ga)x_0 = g(ax_0) = gx_0 = x$. Vastaavasti alkiolla g^{-1} kertominen määrittelee kuvauksen $f^{-1}\{x\} \to f^{-1}\{x_0\}$, ja on selvää, että nämä ovat toistensa käänteiskuvauksia. Kummatkin kuvaukset ovat myös jatkuvia, joten ne ovat homeomorfismeja, mikä todistaa väitteen. $\square$

Tarkastellaan kuvauksen ρ säikeitä. Kaikki niistä ovat homeomorfisia e_n säikeen kanssa. Olkoon $A \in SO(n)$ kierto, joka pitää vektorin e_n paikallaan. Sen matriisiesityksen on oltava muotoa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

missä alkiot a_{ij} määrittelevät $SO(n-1)$ alkion, ja lisäksi jokainen tätä muotoa oleva matriisi määrittelee $SO(n)$ alkion, joka pitää e_n paikallaan. Täten kuvauksen ρ säikeet ovat homeomorfisia $SO(n-1)$ kanssa. Ymmärtääksemme siis ryhmän $SO(n)$ topologiaa, tulee meidän ensin ymmärtää $SO(n-1)$ topologiaa. Tämän rekursiivisen laskeutumisen saamme katkaistua ryhmän $SO(2)$ kohdalla, sillä aiemman perusteella kuvaus $SO(2) \to S^1$ on homeomorfismi.

Tämä ei kuitenkaan anna vielä täydellistä kokonaiskuvaa avaruudesta $SO(n)$. Emme nimittäin tiedä miten nämä säikeet, $SO(n-1)$ homeomorfiset kopiot, liittyvät toisiinsa. Koko avaruus voisi olla vaikka erillinen yhdiste näistä, jolloin $SO(n)$ olisi todella patologinen topologinen avaruus. Huomaamme kuitenkin pian, että kuvauksemme $SO(n) \to S^{n-1}$ on ns. *säiekimppu*. Tämän voi ajatella tarkoittavan sitä, että S^{n-1} parametrisoi säikeitä jatkuvasti, eli kahden lähekkäin olevan pisteen säikeet ovat myös lähellä toisiaan. Täten $SO(n)$ on yhdiste $SO(n-1)$ kopioista, jotka ovat jatkuvasti parametrisoitu hyperpallon S^{n-1} päällä.

Ensiksi on kuitenkin määriteltävä, mitä säiekimppu tarkoitoittaa. Olkoon $f : X \to Y$ topologisten avaruuksien välinen jatkuva kuvaus ja F mikä tahansa topologinen avaruus. Kuvauksen f sanotaan olevan F-säiekimppu, mikäli on olemassa avaruuden Y avoin peite (U_i), ja kaikilla i homeomorfismi $f^{-1}U_i \xrightarrow{\sim} U_i \times F$, joka saa kaavion

$$\begin{tikzcd} f^{-1}U_i \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "f"'] & & U_i \times F \arrow[dl] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

kommutoimaan, missä kuvaus $U_i \times F \to U_i$ on luonnollinen projektio $(u, f) \mapsto u$. Lokaalisti avaruuden Y päällä kuvaus f näyttää siis vain tuloavaruuden luonnolliselta projektiolta. Tätä ehtoa kutsutaan välillä *lokaaliksi triviaalisuudeksi*. Kuvausta f sanotaan *säiekimpuksi*, mikäli se on F-säiekimppu jollain topologisella avaruudella $F \neq \emptyset$.

Olkoon s mikä tahansa hyperpallopinnan S^{n-1} piste. Poistamalla pallopinnasta yksi piste, $-s$, saadaan avaruuden S^{n-1} avoin joukko U_s. Nyt ρ toteuttaa lokaalin triviaalisuuden peitteen $(U_s)_{s\in S^{n-1}}$ suhteen. Osoitetaan tämä ensin avoimelle joukolle U_{e_n}.

Määritellään kuvaus $\psi : U_{e_n} \to SO(n)$ lähettämällä e_n yksikköalkiolle $I \in SO(n)$, ja muilla $v \in U_{e_n}$ lähettämällä v suoralle kierrolle $e_n \rightsquigarrow v$ (tässä tarvitsemme sitä, että $v \neq -e_n$). Haluamme osoittaa, että ψ on jatkuva. Koska $\rho(\psi(v)) = \psi(v)e_n = v$, näemme, että kuvauksen ψ jatkuvuudesta seuraisi myös se, että ψ on homeomorfismi kuvalleen. Täten U_{e_n} on homeomorfinen suorien kiertojen $e_n \rightsquigarrow v$, missä $v \in U_{e_n}$, muodostaman avaruuden kanssa.

Olkoon i jokin luvuista $1..n-1$ ja merkitään vektorien e_n ja e_i virittämää tasoa kirjaimella V. Korollaarin 2 perusteella tiedämme, että kuvauksen ψ rajoittuma lähtöjoukolle $V \cap U_{e_n} \subset V \cap S^{n-1}$ on jatkuva. Merkitään U'_{e_n} avointa joukkoa, joka on saatu joukosta U_{e_n} poistamalla siitä piste e_n. Kuvaus

$$v \mapsto (v_n, \frac{v - v_n e_n}{||v - v_n e_n||}) \equiv (v_n, p(v))$$

määrittelee homeomorfismin $U'_{e_n} \to (-1,1) \times S^{n-2}$, missä vektorien $e_1, ..., e_{n-1}$ virittämän avaruuden yksikköpallo samaistetaan S^{n-2} kanssa. Rajoitutaan avoimeen joukkoon U''_{e_n}, joka on alkukuva $p^{-1}(S^{n-2}\backslash\{-e_i\})$. Induktio-oletuksen nojalla kuvaus, joka lähettää pisteen $v \in S^{n-2}\backslash\{-e_i\}$ suoralle kierrolle $e_i \rightsquigarrow v$, merkitään tätä vaikka A_v, on jatkuva, ja kuten aiemmin, tätä kuvausta voidaan ajatella jatkuvana kuvauksena $S^{n-2}\backslash\{-e_i\} \to SO(n)$. Nyt määrittelemme kuvauksen $U''_{e_n} \to SO(n)$ kaavalla $v \mapsto A_{p(v)} \cdot (\psi \circ A^{-1}_{p(v)}(v))$ (muistetaan, että A_v on kääntyvä kuvaus $S^{n-1} \to S^{n-1}$ ja ψ on kuvaus $U_{e_n} \to SO(n)$). Väitän, että tämä on jatkuva, ja että se on kuvauksen ψ rajoittuma lähtöjoukolle U''_{e_n}.

Osoitetaan ensin jatkuvuus. Kuvaus $A^{-1}_{p(v)}(v)$ on jatkuva, sillä topologisen ryhmän $SO(n)$ toiminta on jatkuvaa. Lisäksi sen kuva sisältyy joukkoon $V \cap U_{e_n}$, mikä johtuu siitä, että $A^{-1}_{p(v)}(v)$ kuuluu aina vektorien e_n ja $A^{-1}_{p(v)}(p(v)) = e_i$ virittämälle aliavaruudelle V, ja koska oletetaan, että $v \neq -e_n$, ei $A^{-1}_{p(v)}(v)$ voi myöskään olla $-e_n$ (kun w "pidetään paikallaan" on A_w lineaarinen isomorfismi). Koska kuvauksen ψ rajoittuma tälle joukolle tiedettiin jatkuvaksi, näemme, että $\psi \circ A^{-1}_{p(v)}(v)$ on jatkuva. Ryhmän $SO(n)$ kertolaskun jatkuvuudesta seuraa lopulta kuvauksen $v \mapsto A_{p(v)} \cdot (\psi \circ A^{-1}_{p(v)}(v))$ jatkuvuus.

Mitä määrittelemämme kuvaus oikeastaan tekee? Konjugointia kuvauksella $A_{p(v)}$ voidaan ajatella jatkuvana kannanvaihtona. Ensin kuvauksessa $A^{-1}_{p(v)}$ vektorien e_n ja $p(v)$ virittämä taso kuvautuu tasolle V, jonka jälkeen ψ antaa suoran kierron $e_n \rightsquigarrow A^{-1}_{p(v)}(v)$. Lopuksi kuvaus $A_{p(v)}$ palauttavaa koordinaatiston paikoilleen. Lopputuloksena saatavassa kuvauksessa e_n kiertyy vektorin v paikalle. Lisäksi tämä kierto tapahtui vektorien e_n ja v virittämää tasoa pitkin, joskin eri eri kannassa kuin normaalisti. Mutta koska kiertojen konstruktio ei riippunut ortonormaalin kannan valinnasta, ei tällä ole väliä. Määrittelemämme kuvaus on siis vain kuvauksen ψ rajoittuma lähtöjoukolle U''_{e_n}.

Viimeisin vaihe voidaan toistaa jonkin toisen kantavektorin e_j, missä j on jokin luvuista $1, ..., n-1$ suhteen, jolloin saamme varmistettua kuvauksen ψ jatkuvuuden rajoitettuna lähtöjoukolle U'_{e_n} (jatkuvuus on lähtöavaruuden lokaali ominaisuus). Enää tarvitsee siis osoittaa kuvauksen ψ jatkuvuus origossa. Mutta tämä on helppoa: ortogonaalinen kannanvaihto ei säilytä ainoastaan vektorien välisiä etäisyyksiä, vaan myös matriisien väliset etäisyydet. Tämä johtuu siitä, että matriisien avaruudelta $\mathbb{R}^{n^2}$ peritty normi säilyy kerrottaessa ortogonaalisella matriisilla. Jos O on ortogonaalinen, ja A mikä tahansa matriisi, niin matriisin OA sarakevektorit ovat matriisin A sarakevektorien kuvat kuvauksessa O ja täten normit säilyvät sarakkeittain. Toisaalta koska transpoosi säilyttää normin, niin edellisen päättelyn nojalla matriisilla O oikealta kertoessa normi säilyy riveittäin.

Olkoon sitten $\epsilon > 0$. Haluamme löytää $\delta > 0$ siten, että $d(\psi(e_n), \psi(v)) < \epsilon$ aina kun $d(e_n, v) < \delta$. Jos rajoitumme johonkin avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaksiulotteiseen tasoon V, niin tiedämme rajoittuman jatkuvuudesta, että tälläinen δ on olemassa. Mutta koska ortogonaalisella kannanvaihdolla voimme olettaa, että kierto konstruoidaan aina tämän kannan suhteen, ja koska ortogonaalinen kannanvaihto säilyttää sekä matriisien, että vektorien väliset etäisyydet, kelpaa sama δ itseasiassa tason V ulkopuolellakin. Täten ψ on jatkuva koko lähtöjoukollaan U_{e_n}.

Nyt määrittelemme homeomorfismin $\Phi : U_{e_n} \times SO(n-1) \xrightarrow{\sim} \rho^{-1}U_{e_n}$ kaavalla $(v, A) \mapsto \psi(v) \cdot A$, missä taas kerran A tulkitaan luonnollisesti $SO(n)$ alkiona. Koska A pitää pisteen e_n paikoillaan, näemme, että $\rho(\Phi(v, A)) = \Phi(v, A)e_n = (\psi(v) \cdot A)e_n = \psi(v)e_n = v$, ja Φ on täten ainakin jatkuva kuvaus $U_{e_n} \times SO(n-1) \to \rho^{-1}U_{e_n}$. Lisäksi yhdistämällä proposition 4 siihen, että $SO(n-1)$ on alkion e_n säie, näemme, että Φ on bijektio. Toisaalta $\Phi^{-1} : \rho^{-1}U_{e_n} \to U_{e_n} \times SO(n-1)$ voidaan määritellä kaavalla $B \mapsto (Be_n, \psi(Be_n)^{-1}B)$, sillä $\psi(Be_n)^{-1}B \in SO(n)$ pitää alkion e_n paikallaan ja on täten ryhmän $SO(n-1)$ alkio samaistuksessamme. Kuvaus Φ^{-1} on selvästi jatkuva, joten Φ on homeomorfismi.

Olkoon $s \in S^{n-1}$ mielivaltainen yksikköpallon piste, ja R jokin kierto, joka kiertää $e_n \rightsquigarrow s$. Määrittelemme homeomorfismin $\Phi_s : U_s \times SO(n-1) \xrightarrow{\sim} \rho^{-1}U_s$ kaavalla $(v, A) \mapsto R \cdot \Phi(R^{-1}v, A)$. Kyseessä on homeomorfismi, sillä R^{-1} on homeomorfismi $U_s \to U_{e_n}$, Φ homeomorfismi $U_{e_n} \times SO(n-1) \to \rho^{-1}U_{e_n}$ ja R on homeomorfismi $\rho^{-1}U_{e_n} \to \rho^{-1}U_s$. Lisäksi $\rho(\Phi_s(v, A)) = \rho(R \cdot \Phi(R^{-1}v, A)) = (R \cdot \Phi(R^{-1}v, A))e_n = (R \cdot \psi(R^{-1}v) \cdot A)e_n = e_n$, joten Φ_s on lokaali trivialisaatio. Täten olemme viimein osoittaneet, että $\rho : SO(n) \to S^{n-1}$ määrittelee $SO(n-1)$-säiekimpun.

Ensimmäisenä huomaamme, että tästä seuraa avaruuden $SO(n)$ polkuyhtenäisyys: olkoot A ja B kaksi $SO(n)$ alkiota ja $s \notin \{Ae_n, Be_n\}$. Nyt sekä A, että B kuuluvat avaruuteen $\rho^{-1}U_s$, joka on selvästi polkuyhtenäinen, sillä $U_s \times SO(n-1)$ on (taas kerran edetään tapauksesta $n = 2$ ylöspäin). Täten voimme karakterisoida $SO(n)$ alkiot, eli avaruuden $\mathbb{R}^n$ kierrot uudella tavalla. Ne ovat täsmälleen ne $\mathbb{R}^n$ isometriset lineaarikuvaukset, jotka ovat samassa polkukomponentissa identtisen kuvauksen I kanssa. Intuitiivisesti tässä on järkeä. Kiertojen välillä voidaan siirtyä jatkuvasti, eli ilman että kierron toiminnassa pisteet hyppäävät epäjatkuvasti. Tämä ei onnistu peilauksilla: identtisestä kuvauksesta ei ole mitenkään mahdollista saada "jatkuvasti" epätriviaalia peilausta.

Seuraavaksi huomaamme, että $SO(n)$ on topologinen monisto. Tämä tiedetään jo tapauksessa $n = 2$, sillä S^1 on tunnetusti topologinen monisto. Jokaisella $s \in S^{n-1}$ avoin joukko U_s tiedetään homeomorfiseski avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ kanssa ja täten $SO(n)$ saadaan peitettyä avoimilla joukoilla, jotka ovat homeomorfisia $\mathbb{R}^{n-1} \times SO(n-1)$ kanssa. Täten induktiivisesti tilanteesta $n = 2$ eteenpäin seuraa, että $SO(n)$ on topologinen monisto, jonka "ulottuvuus" on lukujen $n-1$ ja moniston $SO(n-1)$ ulottuvuuden summa. Täten $SO(n)$ on $(n-1+n-2+...+1) = n(n-1)/2$-monisto. Esimerkiksi siis $SO(3)$ on kolmiulotteinen monisto.

3.1 SO(n) perusryhmä

Seuraavaksi oletetaan perustietoja homotopiateoriasta. Haluaisimme määritellä topologisen avaruuden $SO(n)$ perusryhmän. Tapaus $n = 2$ seuraa taas helposti siitä, että $SO(2) \approx S^1$, ja ympyrän perusryhmän tiedetään olevan $\mathbb{Z}$. Koska $SO(n)$ on vain $SO(n-1)$ jatkuvasti parametrisoituna yhdesti yhtenäisen avaruuden S^{n-1} päällä, olisi luontevaa odottaa, että avaruuden $SO(n)$ perusryhmä olisi myös $\mathbb{Z}$; tiedetäänhän, että tuloavaruuden perusryhmä on kerrottavien avaruuksien perusryhmien tulo. Perusryhmä ei kuitenkaan käyttäydy yhtä mukavasti säiekimppujen yhteydessä.

Helpoimman esimerkin tästä saa tarkastelemalla peitekuvauksia: kuvauksen $p : \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{ir}$ tiedetään määrittelevän yksikköympyrän (universaali)peiteavaruuden. Peiteavaruuden määritelmästä on selvää, että peiteavaruus on säiekimppu diskreetillä säikeellä. Kuvaus p määrittelee siis $\mathbb{Z}$-säiekimpun, ja koska avaruuden $\mathbb{Z}$ perusryhmä tiedetään triviaaliksi, edellisen heuristiikan mukaan olisi avaruuden $\mathbb{R}$ perusryhmän oltava $\mathbb{Z}$. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa, sillä $\mathbb{R}$ on yhdesti yhtenäinen, eli erityisesti sen perusryhmä on triviaali. Mutta ehkäpä epäonnistuminen johtui ainoastaan säikeen diskreettiydestä. Meitä kiinnostavassa tapauksessa kaikki säikeet ovat polkuyhtenäisiä, ehkä tässä tapauksessa tällaista patologista käyttäytymistä ei voi syntyä. Nämä toiveet murskaa seuraava analyysi, joka osoittaa, että avaruuksien $SO(n)$, missä n on vähintään 3, perusryhmät ovat isomorfisia kahden alkion ryhmän $\mathbb{Z}/(2)$ kanssa.

Turvaudumme perusryhmän laskemisessa Van Kampenin lauseeseen. Olkoon s_1 ja s_2 kaksi eri avaruuden S^{n-1} pistettä, $s_0 \in S^{n-1}$ joku edellistä pisteistä, sekä niiden antipodaalisista pisteistä eroava piste, ja $x_0 \in \rho^{-1}\{s_0\}$. Nyt joukot $\rho^{-1}U_{s_1}$ ja $\rho^{-1}U_{s_2}$ peittävät avaruuden $SO(n)$. Lisäksi niiden leikkaus on isomorfinen $(S^{n-1}\setminus\{s_1, s_2\}) \times SO(n-1)$ kanssa, ja täten polkuyhtenäinen. Van Kampenin lauseen mukaan avaruuden $SO(n)$ perusryhmä $\pi_1(SO(n), x_0)$ on isomorfinen ryhmän $(\pi_1(\rho^{-1}U_{s_1}, x_0) * \pi_1(\rho^{-1}U_{s_2}, x_0))/N$, missä N on pienin normaali aliryhmä, joka sisältää kaikki muotoa $[\gamma][\gamma]^{-1}$ olevat alkiot, missä γ on avaruuden $\rho^{-1}(U_{s_1}\cap U_{s_2})$ suljettu polku kantapisteenään x_0, eli joukon $\Omega(\rho^{-1}(U_{s_1}\cap U_{s_2}), x_0)$ alkio. (Ensimmäinen $[\gamma]$ ajatellaan tässä ryhmän $\pi_1(\rho^{-1}U_{s_1}, x_0)$, ja toinen toinen $[\gamma]$ ryhmän $\pi_1(\rho^{-1}U_{s_2}, x_0)$ alkioksi.)

Koska $\rho^{-1}U_{s_i}$ on homeomorfinen avaruuden $U_{s_i}\times SO(n-1)$ kanssa, ja koska U_{s_i} on kutistuva topologinen avaruus, näemme, että jokainen suljettu polku $\gamma\in\Omega(\rho^{-1}U_{s_1}, x_0)$ on homotooppinen jonkun sellaisen polun γ_i kanssa, jonka kuva sisältyy kokonaan säikeeseen $\rho^{-1}\{s_0\}$. Tapauksessa, jossa polun γ kuva sisältyy avaruuteen $\rho^{-1}(U_{s_1}\cap U_{s_2})$, ja jossa $n>3$, voimme jopa olettaa, että $\gamma_1=\gamma_2$, sillä $U_{s_1}\cap U_{s_2}$ on yhdesti yhtenäinen. Täten avaruuden $SO(n)$, missä $n>3$, perusryhmä voidaan esittää muodossa $(\pi_1(\rho^{-1}\{s_0\}, x_0) * \pi_1(\rho^{-1}\{s_0\}, x_0))/N$, missä N on alkioiden $[\gamma][\gamma]^{-1}$, $[\gamma]\in\pi_1(\rho^{-1}\{s_0\}, x_0)$, generoima normaali aliryhmä. Kyseinen tekijäryhmä on selvästi $\pi_1(\rho^{-1}\{s_0\}, x_0)$, joten näemme, että kaikilla $n>3$ perusryhmä $\pi_1(SO(n))$ on isomorfinen perusryhmän $\pi_1(SO(3))$ kanssa.

Tarkastellaan tarkemmin tilannetta $n=3$. Valitaan pisteiksi $s_1=e_3$ ja $s_2=-e_3$. Olkoon $\psi' : U_{-e_3}\to SO(3)$ kuvaus, joka lähettää pisteen v suoralle kierrolle $-e_3\rightsquigarrow v$. Olkoon R kierto $e_3\rightsquigarrow -e_3$ vektorien e_2, e_3 virittämää tasoa pitkin. Määrittelemme isomorfismin $\Phi' : U_{-e_3}\times SO(2)\to\rho^{-1}U_{-e_3}$ lähettämällä parin (v, A) alkiolle $\psi'(v)RA$. Kuten aiemmin, voidaan helposti nähdä, että kyseessä on homeomorfismi. Lisäksi $\rho(\Phi'(v, A)) = \psi'(v)RAe_3=\psi'(v)(-e_3)=v$, joten kyseessä on vektorikimpun lokaali trivialisaatio. Tarvitsemme myöhemmin myös ekplisiittisen kaavan käänteiskuvaukselle Φ'. Selvästi $\Phi'(B) = (Be_3, R^{-1}\psi'(Be_3)^{-1}B)$ kelpaa.

Valitaan kantapisteiksi $s_0=e_1$ ja pisteeksi x_0 suora kierto $e_3\rightsquigarrow e_1$. Van Kampenin lauseen mukaan

$$\pi_1(SO(3), x_0)\cong(\pi_1(\rho^{-1}U_{e_3}, x_0) * \pi_1(\rho^{-1}U_{-e_3}, x_0))/N$$

kanssa. Ongelmamme tässä on ryhmän N määrittäminen. Aloitamme yksinkertaistamalla avaruuksiamme. Lokaalista triviaalisuusehdosta seuraa, että jokainen x_0 kantainen suljettu polku avaruudessa $\rho^{-1}U_{s_i}$ on homotooppinen *avaruudessa* $\rho^{-1}U_{s_i}$ jonkin sellaisen polun kanssa, jonka kuva sisältyy kokonaan säikeelle pisteen s_0 päällä. Ryhmä N on pienin normaali aliryhmä joka sisältää relaatiot, jolla ryhmien vapaassa tulossa samaistetaan $[\gamma]\in\pi_1(\rho^{-1}U_{e_3}, x_0)$ ja $[\gamma]\in\pi_1(\rho^{-1}U_{-e_3}, x_0)$, missä γ käy läpi kaikki polut avaruudella $\rho^{-1}U$, missä $U=U_{e_3}\cap U_{-e_3}$. Nämä vastaavat homotopiassa jotain polkua pisteen s_0 säikeellä, mutta koska homotopiat tapahtuivat eri avaruuksissa, ei ole mitään taetta, että nämä polut olisivat keskenään homotooppiset. Kuitenkin, jos oletamme, että γ sisältyi jo valmiiksi kokonaan kyseiseen säikeeseen, näemme suoraan, että näiden on täsmättävä. Koska pisteen s_0 säikeen perusryhmä virittää avaruuksien $\rho^{-1}U_{s_i}$ perusryhmät, ja koska säikeen (joka on homeomorfinen S^1 kanssa) perusryhmän virittää jokin polku γ_1, näemme, että

$$\pi_1(SO(3), x_0)\cong\pi_1(\rho^{-1}\{s_0\}, x_0)/N',$$

missä N' on ryhmästä N "ylijääneiden" relaatioiden ryhmä. Ryhmän $\pi_1(\rho^{-1}\{s_0\})$ tiedetään olevan homeomorfinen abelin ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa, joten ongelmaksi jää enää aliryhmän N' määrittäminen.

Aliryhmää N määrittäessä meidän ei tarvitse käsitellä kaikkia avaruuden $\rho^{-1}U$ x_0-kantaisia polkuja, vaan riittää käsitellä kaikki homotopiaa vaille. Tiedämme, että $\rho^{-1}U$ on isomorfinen $U \times \rho^{-1}\{s_0\}$ kanssa, ja että kuvauksen ρ rajoittuma on oleellisesti luonnollinen projetio ensimmäiselle koordinaatille. Tuloavaruuden peruryhmän virittävät polun γ_1 kanssa mikä tahansa sellainen polku γ_2, jonka kuvapolku $\rho\gamma_2$ virittää avaruuden U perusryhmän. Muistetaan, että U on pallopinta S^2, josta on poistettu etelä- ja pohjoisnapa, ja täten polku, joka kiertää päiväntasaajan kerran, virittää sen perusryhmän. Määrittelemme ensin polun γ' kaavalla

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $R_0 = x_0$, eli siis suora kierto $e_3 \rightsquigarrow e_1$. Määrittelemme polun γ_2 kaavalla $t \mapsto \gamma'(t)R_0$. Tämä kuvaus tekee juuri sen, minkä halusimmekin: kuvapolku $\rho\gamma_2$ kiertää pallon päiväntasaajan kerran ympäri. Täten jokainen avaruuden $\rho^{-1}U$ polku on homotooppinen jonkin tulopolun $\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}$ kanssa, missä $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Selvittääksemme tällaisten polkujen homotopialuokka avaruuksilla $\rho^{-1}U_{s_i}$, riittää meidän selvitää tämä pelkästään polulle γ_2, sillä polun γ_1 käyttäytyminen tunnetaan jo täysin.

Tarkastellaan ensin mitä käy avaruudella $\rho^{-1}U_{e_3}$. Hyödyntäen lokaalia trivialisaatiota $\Phi : U_{e_3} \times SO(2) \to \rho^{-1}U_{e_3}$ tarkastelemme kuvapolkua $\tilde{\gamma_2} = \Phi^{-1}\gamma_2$. Tämä saadaan määriteltyä kaavalla $\tilde{\gamma_2}(t) = (\gamma_2(t)e_3, \psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t))$. Tämä polku on homotooppinen polun $t \mapsto (e_1, \psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t))$ kanssa, joka taas avaruudella $\rho^{-1}U_{e_3}$ (ja säikeellä $\psi^{-1}\{s_0\}$) vastaa polkua $t \mapsto \psi(e_1)\psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t) = R_0\psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$.

Vastaavasti käyttämällä lokaalia trivialisaatiota $\Phi' : U_{-e_3} \times SO(2) \to \rho^{-1}U_{-e_3}$, saamme polun $\bar{\gamma_2} = \Phi'^{-1}\gamma_2$ kaavalla $t \mapsto (\gamma_2(t)e_3, R^{-1}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t))$ (R määriteltiin kuvauksen Φ' määrittelyn yhteydessä). Tämä on homotooppinen polun $t \mapsto (e_1, R^{-1}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t))$ kanssa, joka avaruudella $\rho^{-1}U_{-e_3}$ vastaa polkua $t \mapsto \psi'(e_1)RR^{-1}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$, ja koska $\psi'(e_1) = R_0^{-1}$, polkumme on $t \mapsto R_0^{-1}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$

Olemme siis saaneet kaksi polkua, joiden kuva sisältyy säikeelle $\rho^{-1}\{s_0\}$. Riittää tarkastella näiden homotopialuokkia avaruudella $\rho^{-1}U_{e_3}$, ja analyysin helpottamiseksi palautamme tilanteen poluille pisteen e_n säikeellä $SO(2)$ (jaamme siis R_0 pois vasemmalta). Saamme polut $t \mapsto \psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$ sekä $t \mapsto R_0^{-2}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$. Koska R_0^2 on 180 asteen kierto, on se oma käänteiskuvauksensa.

Seuraavaksi huomaamme, että $\psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$ on täsmälleen $\gamma'(t)$, missä γ' on aiemmin määritelty "kiertopolku". Tämä nähdään tarkastelemalla pisteen e_1 kuvautumista. Koska $\gamma_2(t) = \gamma'(t)R_0$, näemme, että alussa e_3 kuvautuu e_1 paikalle ja e_1 vastaavasti

$-e_3$ paikalle. Tämän jälkeen kierretään vektoria e_3 (joka siis on vektorin e_1 paikalla) kuvauksella $\gamma'(t)$ ja lopulta kun kierrämme e_3 takaisin "omalle paikalleen" suoralla kierrolla $\psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}$, siirtyy e_1 ($-e_3$ paikalta) vektorin $\gamma'(t)e_1$ paikalle. Koska yhden pisteen kuvautuminen määrittelee ympyrän kierrot täysin, näemme, että $\psi(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$ on $\gamma'(t)$.

Entä mitä sitten on $R_0^{-2}\psi'(\gamma_2(t)e_3)^{-1}\gamma_2(t)$? Taas kerran tämän määrittää täysin alkion e_1 kuvautuminen. Alkuosa menee täsmälleen samalla tavalla kun aiemmin, mutta suora kierto kiertääkin vektorin e_3 ($\gamma'(t)e_1$ paikalta) vektorin $-e_3$ paikalle, jolloin luonnollisestikin e_1 siirtyy vektorin $-\gamma'(t)e_1$ paikalle. Kuvaus $R_0^{-2} = R_0^2$ on esitettävissä standardikannassa matriisina

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

joka kuvaa vektorin $-\gamma'(t)e_1 = (-\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t), 0)$ vektorille $(\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t), 0)$ jonka tiedetään olevan sama kuin $(\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t), 0) = \gamma'(-t)$.

Polku $\gamma'(t)$ generoi säikeen $SO(2)$ homotopiaryhmän ja $\gamma'(-t)$ on sen käänteispolku. Täten relaatio, joka samaistaa nämä polut, virittää ryhmän N'. Täten $\pi_1(SO(3), x_0) \cong \mathbb{Z}/(2)$. Vedämme tästä heti kaksi johtopäätöstä. Ensinnäkään $SO(3)$ ei voi olla tuloavaruus $S^2 \times SO(2)$, sillä tällöin sen perusryhmä olisi $\mathbb{Z}$. Toisekseen $SO(n)$ ei voi millään $n \geq 3$ olla homeomorfinen hyperpallopinnan $S^{n(n-1)/2}$ kanssa, sillä jälkimmäisen perusryhmä on aina triviaali.