Topologisten avaruuksien metristyvyys

Toni Annala

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Topologia on matematiikan haara, joka tutkii erilaisia muotoja, niiden ominaisuuksia ja näiden ominaisuuksien säilymistä erilaisissa kuvauksissa. Topologian perustavanlaatuisin käsite on avoin joukko, joka on eräänlainen yleistys esimerkiksi reaalilukujen avoimesta välistä.

Topologinen avaruus koostuu perusjoukosta ja topologiasta, eli kaikkien sen joukon avointen joukkojen kokoelmasta. Jälkimmäinen voidaan muuten valita mielivaltaisesti, mutta sen pitää toteuttaa tietyt säännöt. Jatkuvat kuvaukset ovat kuvauksia topologisten avaruuksien välillä, jotka säilyttävät tiettyjä topologisia rakenteita. Ne ovat hyvin tärkeässä roolissa topologiassa.

Eräs topologisen avaruuden erikoistapaus on metrinen avaruus, jonka oletetaan olevan lukijalle jo tuttu (katso esimerkiksi [1]). Metrisille avaruuksille ei määritellä suoraan topologiaa, vaan metriikka, joka kertoo avaruuden pisteiden väliset etäisyydet. Metriikka kuitenkin määrittelee samalla avaruudelle topologian, eli kaikkien sen avointen joukkojen joukon. Hyvin suuri osa metrisen avaruuden topologisista ominaisuuksista on kuitenkin palautettavissa helposti sen topologian ominaisuuksiin.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella sitä, milloin topologiselle avaruudelle voidaan valita metriikka, joka antaa sille sen alkuperäisen topologian, eli milloin topologinen avaruus on metristyvä. Nagatan-Smirnovin metristyvyyslause antaa sekä riittävän, että välttämättömän ehdon topologisen avaruuden metristyvyydelle ja sen todistaminen onkin tämän tutkielman päätarkoitus.

Luku 2

Topologiset avaruudet

Metriset avaruudet ovat erikoistapaus paljon yleisemmistä rakenteista, topologisista avaruuksista. Kuten jo metristen avaruuksien kohdalla huomattiin, avaruuden topologia, eli kaikkien sen avointen osajoukkojen joukko, määrää täysin sen topologiset ominaisuudet. Täten koko metriikan voidaan ajatella olevan topologisten ominaisuuksien kannalta merkityksetön. Yleisille topologisille avaruuksille metriikkaa ei olekaan määritelty ollenkaan.

Tässä luvussa määrittelemme topologisten avaruuksien peruskäsitteitä kuten ne on määritelty kirjassa [2].

Määritelmä 2.1. Olkoon X mikä tahansa joukko. Kokoelma $\mathcal{T} \subset P(X)$ on joukon X *topologia*, mikäli

1. $X \in \mathcal{T}$ ja $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. jos $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, niin $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$;
3. jos $A \in \mathcal{T}$ ja $B \in \mathcal{T}$, niin $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Ehdot 2 ja 3 tarkoittavat, että topologian pitää olla suljettu mielivaltaisten yhdisteiden ja äärellisten leikkausten suhteen. On selvää, että metrisille avaruuksille määritelty topologia on topologia myös äskeisen määritelmän mukaan.

Määritelmä 2.2. *Topologinen avaruus* on pari $(X, \mathcal{T})$, missä $\mathcal{T}$ on joukon X topologia. Jos $A \in \mathcal{T}$, sanotaan joukon A olevan *avoin*. Jos U on avoin joukko ja $x \in U$, niin U on x:n *ympäristö*. Tästä lähtien topologiseen avaruuteen $(X, \mathcal{T})$ viitataan yleensä vain pelkällä symbolilla X.

Määritelmä 2.3. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Joukko $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ on avaruuden X *kanta*, jos jokainen joukon $\mathcal{T}$ alkio voidaan esittää joukon $\mathcal{B}$ alkioiden yhdisteenä.
Joukko $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ on avaruuden X *esikanta*, jos joukko

$$\mathcal{P}' = \{A \mid A = \bigcap_{i=0}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{P} \text{ kaikilla luonnollisilla luvuilla } i \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

on avaruuden X kanta.

Topologisen avaruuden kannat ja esikannat ovat usein käteviä, sillä niiden avulla jotkin todistukset muuttuvat yksinkertaisemmiksi. Tämän tutkielman kannalta kannoilla on kuitenkin suurempikin merkitys, metristyvyys nimittäin vaatii avaruudelta tietynlaisen kannan olemassaolon. Palaamme tähän myöhemmin.

Metrisen avaruuden avointen kuulien joukko on yksi esimerkki kannasta. Toisaalta joukot (∞, r) ja (r, ∞), missä $r \in \mathbb{R}$, muodostavat avaruuden $\mathbb{R}$ esikannan.

Kuten metristen avaruuksienkin kohdalla, jatkuvat kuvaukset ovat erittäin tärkeitä topologisia avaruuksia tutkittaessa. Jatkuvuuden määritelmä yleisten topologisten avaruuksien välisille kuvauksille on hyvin samankaltainen, kuin jatkuvuuden määritelmä metristen avaruuksien välisille kuvauksille.

Määritelmä 2.4. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in X$, mikäli jokaiselle pisteen $f(x_0)$ ympäristölle V löytyy X:n ympäristö U, jolla $fU \subset V$. Jos f on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä, niin kuvaus f on *jatkuva*.

Myös yleisissä topologisissa avaruuksissa jatkuvat kuvaukset voidaan karakterisoida avointen joukkojen alkukuvien avulla, aivan kuten metristen avaruuksien tapauksessakin.

Lause 2.5. *Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos $f^{-1}A$ on avoin jokaiselle avoimelle $A \subset Y$.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Nyt jokaiselle $x \in f^{-1}A$ voidaan määritelmän mukaan valita ympäristö U_x, jolle pätee $fU_x \subset A$. Selvästi

$$f^{-1}A = \bigcup_{x \in f^{-1}A} U_x,$$

joten $f^{-1}A$ on avointen joukkojen yhdisteenä avoin.
"$\Leftarrow$": Nyt jos $x \in X$ ja V on pisteen $f(x)$ ympäristö, niin x:n ympäristölle $U = f^{-1}V$ pätee selvästi $fU \subset V$. Täten f on jatkuva. $\square$

Huomautus 2.6. Itse asiassa funktion f jatkuvuuden takaamiseksi riittää se, että jonkin avaruuden Y esikannan P alkioiden alkukuvat ovat avoimia. Tämä helpottaa usein jatkuvuustarkasteluja ja tulemmekin käyttämään tätä myöhemmin.

Määritelmä 2.7. Olkoon X topologinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on *suljettu*, jos $X \setminus A$ on avoin.

Huomautus 2.8. Lause 2.5 voidaan muotoilla myös suljettujen joukkojen avulla, aivan samalla tavalla kuin metrisillä avaruuksillakin. Todistus on suoraviivainen ja se sivuutetaan.

Määritelmä 2.9. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Joukon A *sulkeuma* $\overline{A}$ määritellään kaavalla

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \text{ jokainen pisteen } x \text{ ympäristö } U \text{ leikkaa joukkoa } A\}.$$

Huomautus 2.10. Sulkeuma $\overline{A}$ on aina suljettu, sillä jokaisella sen komplementin pisteellä on ympäristö joka ei leikkaa joukkoa $\overline{A}$, eli sen komplementti on avoin. Selvästi $\overline{A}$ on suppein niistä suljetuista joukoista, joka sisältää joukon A.

Metrisisten avaruuksien osajoukoille on mahdollista määritellä topologinen rakenne rajoittamalla alkuperäinen metriikka kyseessä olevaan osajoukkoon. Topologisilla avaruuksilla osajoukkotopologian määritelmä on samankaltainen.

Määritelmä 2.11. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $A \subset X$. Nyt joukolle A voidaan määritellä *osajoukkotopologia*

$$\mathcal{T}' = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Osajoukkotopologiassa avoimia ovat siis täsmälleen alkuperäisen avaruuden avointen joukkojen rajoittumat joukkoon A.

Tästä eteenpäin jos puhutaan topologisen avaruuden osajoukosta A avaruutena, niin tarkoitetaan juuri sitä topologista avaruutta, joka syntyy kun varustetaan A osajoukkotopologialla. Jos määritelmässä esiintyvä osajoukko A on avoin, niin jokainen avaruuden A avoin joukko on myös alkuperäisen avaruuden avoin joukko.

Määritelmä 2.12. Olkoon X, Y topologisia avaruuksia. Niiden karteesiselle tulolle $X \times Y$ voidaan määritellä (äärellinen) *tulotopologia* $\mathcal{T}$, jolla on kanta

$$\mathcal{B} = \{A \times A' \mid A \subset X \text{ ja } A' \subset Y \text{ avoimia}\}.$$

Topologian $\mathcal{T}$ alkiot saadaan siis yhdisteenä kannan $\mathcal{B}$ alkioista.

Myöhemmin jos puhutaan topologisten avaruuksien äärellisestä karteesisesta tulosta topologisena avaruutena, tarkoitetaan sitä topologista avaruutta, joka syntyy kun karteesinen tulo varustetaan tulotopologialla.

Topologisten avaruuksien erilaiset peitteet esiintyvät monissa lauseissa ja määritelmissä. Esimerkiksi topologisen avaruuden kompaktisuus voidaan määritellä pelkästään avointen peitteiden avulla.

Määritelmä 2.13. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ on avaruuden X *avoin peite*, mikäli $\bigcup \mathcal{A} = X$. Kokoelma $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ on *joukon $A \subset X$ avoin peite*, jos $A \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Esimerkiksi avaruuden kannat ja esikannat ovat aina peitteitä. Yksi avoimen peitteen hyvistä ominaisuuksista on sen liittyminen funktioiden jatkuvuuteen. Seuraava lause yksinkertaistaa joskus funktion todistamista jatkuvaksi.

Lause 2.14. *Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia, $\mathcal{A}$ avaruuden X avoin peite ja kuvaus $f : X \to Y$. Jos kaikilla $U \in \mathcal{A}$ funktion f rajoittuma avaruuteen U on jatkuva, niin f on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $V \subset Y$ avoin. Nyt

$$f^{-1}V = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U \cap f^{-1}V,$$

eli alkukuva on esitettävissä avointen joukkojen yhdisteenä, joten se on avoin. $\square$

Viimeisenä tässä luvussa todistamme, että funktiojonon tasainen suppeneminen säilyttää jatkuvuuden. Tulos on jo tunnettu kuvauksille metrisiltä avaruuksilta metrisille avaruuksille, mutta se pätee myös silloin kun lähtöavaruus on topologinen avaruus.

Määritelmä 2.15. Olkoon X topologinen avaruus ja Y metrinen avaruus. Olkoon meillä lisäksi jono funktioita $f_n : X \to Y$. Jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee tasaisesti* kohti funktiota $f : X \to Y$, mikäli

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d_Y(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} = 0.$$

Lause 2.16. *Olkoon X topologinen avaruus, Y metrinen avaruus ja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono jatkuvia kuvauksia $X \to Y$, jotka suppenevat tasaisesti kohti kuvausta $f : X \to Y$. Tällöin kuvaus f on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $x \in X$ ja merkitään $y = f(x)$. Olkoon lisäksi $r > 0$ positiivinen reaaliluku. On osoitettava, että on olemassa pisteen x ympäristö U jolla $fU \subset B_Y(y, r)$, eli $d_Y(y, f(z)) < r$ kaikilla $z \in U$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku, jolla $\sup\{d_Y(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} < r/4$. Olkoon $U \subset X$ sellainen pisteen x ympäristö, että $f_nU \subset B_Y(y, r/2)$. Nyt jos $x' \in U$, niin

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x')) < \frac{r}{4} + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = r,$$

eli $fU \subset B_Y(x, r)$. Kuvaus f on siis jatkuva. $\square$

Luku 3

Erotteluaksioomat

Vaikka tähän saakka on saattanut näyttää siltä, että yleiset topologiset avaruudet olisivat hyvin samankaltaisia kuin metriset avaruudet, tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa. Topologisessa avaruuksissa ei esimerkiksi kahdelle erilliselle pisteelle löydy välttämättä erillisiä ympäristöjä, vaikka sellaiset voidaan aina löytää metrisissä avaruuksissa.

Juuri tällaiset kysymykset kuten: ”onko kahdella erillisellä pisteellä erilliset ympäristöt”, ovat avainasemassa, kun halutaan ymmärtää, milloin topologinen avaruus voidaan ajatella metriseksi avaruudeksi. Erotteluaksioomat luokittelevat topologisia avaruuksia sen mukaan, miten eri sen osajoukkoja tai pisteitä voi erottaa toisistaan avointen joukkojen avulla.

Määritelmä 3.1. Erotteluaksioomia [2]: Olkoon X topologinen avaruus.

1. X on T_0-*avaruus*, mikäli kaikille $x, y \in X$, $x \neq y$ löytyy avaruuden X avoin joukko U, joka sisältää tasan toisen näistä pisteistä.

2. X on T_1-*avaruus*, mikäli kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$ löytyy pisteen x ympäristö, joka ei sisällä pistettä y.

3. X on T_2-*avaruus* (*Hausdorffin avaruus*), mikäli kahdelle erillisille pisteille $x, y \in X$ löytyy erilliset ympäristöt.

4. X on *säännöllinen*, jos se on T_1-avarus ja lisäksi jokaiselle suljetulle $A \subset X$ ja pisteelle $b \in X$, joka ei kuulu joukkoon A, löytyy erilliset ympäristöt.

5. X on *normaali*, jos se on T_1-avaruus ja lisäksi erillisille suljetuille joukoille $A, B \subset X$ löytyy erilliset ympäristöt.

Myöhemmin tulemme näkemään, että jokainen metrinen avaruus on *täysin normaali*, eli se on normaali ja toteuttaa vielä erään lisäehdon. Tähän palataan myöhemmin. Normaaleissa avaruuksissa on mielenkiintoista se, että niissä voidaan erottaa erilliset suljetut joukot toisistaan jatkuvalla kuvauksella yksikkövälille I. Tämän todistamista ennen tarvitsemme kuitenkin yhden aputuloksen.

Lemma 3.2. *Olkoon $I = [0,1]$ metrinen avaruus varustettuna reaaliluvuilta perityltä metriikalla. Nyt joukot $A_r = [0,r)$, $B_r = (r,0]$, missä $r \in (0,1)$, muodostavat avaruuden I esikannan.*

Todistus. Olkoon A jokin avaruuden I avoin joukko. Nyt jokaista $a \in A$ kohti on $r_a > 0$, jolla $B(a, r_a) \subset A$. Tämä ympäristö on aina muotoa $(a - r_a, a + r_a) \cap I$.

Jos $a \in \ (0,1)$, voidaan r_a valita niin pieneksi, että pisteet $a - r_a$ ja $a + r_a$ kuuluvat avoimeen yksikköväliin $(0,1)$. Tällöin saadaan pisteelle a ympäristö $[0, a+r_a) \cap (a-r_a, 1] \subset A$.

Jos taas a on toinen yksikkövälin päätepisteistä, niin tämä ympäristö on joko $[0, 0+r_a)$, tai $(1 - r_a, 1]$, kunhan varmistetaan ensin, että $r_a < 1$.

Täten joukkojen A_r ja B_r äärelliset leikkaukset muodostavat avaruuden I kannan, eli ne muodostavat yhdessä esikannan avaruudelle I. □

Seuraava lause tunnetaan historiallisista syistä Urysonin lemmana, vaikka se on jo itsessään varsin mielenkiintoinen tulos, lauseen todisti ensimmäisen kerran Uryson vuonna 1925 [3].

Lause 3.3. Urysonin lemma. *Olkoon X normaali topologinen avaruus ja suljetut joukot $A, B \subset X$ erillisiä. Tällöin on olemassa jatkuva $f : X \to [0,1]$, jolle pätee $fA = \{0\}$ ja $fB = \{1\}$.*

Todistus. Olkoon $x_1, x_2, ...$ kaikkien niiden rationaalilukujen jono, jotka kuuluvat avoimelle yksikkövälille $(0,1)$. Voidaan lisäksi olettaa, että jokainen tällainen rationaaliluku esiintyy jonossa vain kerran. Merkitään $\mathbb{Q}_I$:llä kaikkien niiden rationaalilukujen joukkoa, jotka kuuluvat suljettuun yksikköväliin $I = [0,1]$.

Olkoot sitten A ja B suljettuja X:n osajoukkoja, jotka ovat lisäksi erillisiä. Tarkoituksenamme on valita jokaista $q \in \mathbb{Q}_I$ kohti avoin joukko U_q. Lisäksi vaadimme näiltä joukoilta, että kaikilla $q, q' \in \mathbb{Q}_I \backslash \{0,1\}$, $q < q'$, pätee $\overline{U}_q \subset U_{q'}$ ja lisäksi $\overline{U}_q \cap B = \emptyset$.

Konstruoimme nämä joukot induktiolla. Oletetaan että olemme jo valinneet avoimet joukot rationaaliluvuille $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. Olkoon m suurin rationaaliluku, joka on pienempi kuin x_n ja jolle on jo valittu U_m. Olkoon samoin M pienin rationaaliluku, joka on suurempi kuin x_n ja jolle on jo valittu U_M. Tällaisia m ja M ei välttämättä ole olemassa, mutta ongelma ratkeaa varsin luonnollisella tavalla myöhemmin. Esimerkiksi ensimmäinen valinta (induktion pohjatapaus) ratkeaa tilanteena, jossa kumpaakaan luvuista m, M ei ole olemassa.

Jos rationaalilukua m ei ole olemassa, niin merkitään $\overline{U}_m = A$. Täysin samalla tavalla jos rationaalilukua M ei ole olemassa, voidaan merkitä $X \backslash U_M = B$. Nyt koska $m < M$ (vaihtoehtoisesti jos lukua m tai M ei ole olemassa seuraava väite seuraa induktio-oletuksesta), niin $\overline{U}_m \subset U_M$, joten joukot $\overline{U}_m$ ja $X \backslash U_M$ ovat suljettuja ja erillisiä. Täten joukot $\overline{U}_m$ ja $X \backslash U_M$ ovat edelleen suljettuja ja erillisiä.

X:n normaalisuuden perusteella suljetuille joukoille $\overline{U}_m$ ja $X \backslash U_M$ voidaan valita erilliset ympäristöt U ja U', missä siis $\overline{U}_m \subset U$ ja $X \backslash U_M \subset U'$. Lisäksi suoraan sulkeuman määritelmästä seuraa, että $\overline{U} \cap (X \backslash U_M) = \emptyset$, eli $\overline{U} \subset U_M$, jolloin myös $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Täten voimme valita rationaalilukua x_n vastaavaksi ympäristöksi U_{x_n} joukon U.

Olkoon vielä $U_1 = X$. Nyt voimme konstruoida jatkuvan kuvauksen $f : X \to I$ kaavalla
$$f(x) = \inf\{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \mid x \in U_q\}.$$
Kuvaus f on hyvin määritelty, sillä epätyhjällä ja rajoitetulla reaalilukujen osajoukolla on aina infimum. Funktion f jatkuvuuden osoittamiseksi riittää osoittaa ainoastaan, että joukkojen $[0, r)$ ja $(r, 1]$, missä $r \in (0, 1)$ alkukuvat ovat avoimia, sillä nämä joukot muodostavat yksikkövälin I esikannan.

Olkoon $r \in (0, 1)$. Joukon $A_r = [0, r)$ alkukuva $f^{-1}A_r$ voidaan määritellä kaavalla
$$f^{-1}A_r = \bigcup\{U_q \mid q \neq 0 \text{ ja } q < r\},$$
sillä $f(x) < r \iff$ on olemassa rationaaliluku $0 \leq q < r$, jolla $x \in U_q$.

Olkoon $B_r = (r, 1]$. Nyt alkukuva $f^{-1}B_r$ voidaan määritellä kaavalla
$$f^{-1}B_r = \bigcup\{X \backslash \overline{U}_q \mid q \neq 0 \; ja \; q > r\}.$$
Ylläolevassa kaavassa oikea puoli on selkeästi vasemman puolen osajoukko, sillä jokaisella $q > r$, pätee $X \backslash \overline{U}_q \subset X \backslash U_q \subset f^{-1}B_r$. Osoitetaan vielä vasen puoli oikean puolen osajoukoksi. Jos $x \in f^{-1}B_r$, niin $f(x) > r$ ja täten on olemassa rationaaliluku $r < q' < f(x)$ ja tälle luvulle on pädettävä $x \notin U_{q'}$, muuten $f(x) \leq q'$. Mutta nyt on olemassa myös rationaaliluku $r < q'' < q'$ ja tälle pätee $\overline{U}_{q''} \subset U_{q'}$. Täten siis $x \notin \overline{U}_{q''}$, eli $x \in X \backslash \overline{U}_{q''}$. Joukko $f^{-1}B_r$ on todella täten avointen joukkojen yhdisteenä avoin.

Funktio f on siis jatkuva. Lisäksi funktion f konstruktiosta seuraa suoraan, että $fA = \{0\}$ ja $fB = \{1\}$. Väite on täten todistettu. □

Seuraavaksi määrittelemme muutaman erikoisemman topologisen käsitteen ja todistamme näiden joitain ominaisuuksia. Määritelmät ja lauseet perustuvat Engelkingin kirjaan [3].

Määritelmä 3.4. Olkoon X topologinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on *G_δ-joukko*, jos se on numeroituva leikkaus avoimista joukoista. Joukko $B \subset X$ on *F_σ-joukko*, jos se on numeroituva yhdiste suljetuista joukoista.

Huomautus 3.5. Selvästi jokaisen G_δ-joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa on G_δ-joukko. Sama pätee F_σ-joukoille. Lisäksi $A \subset X$ on G_δ-joukko tasan silloin, kun $X \backslash A$ on F_σ-joukko.

Lause 3.6. *Olkoon X normaali topologinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on suljettu G_δ-joukko jos ja vain jos $A = f^{-1}\{0\}$ jollain jatkuvalla funktiolla $f : X \to I$.*

Todistus. "$\Leftarrow$": Joukko $\{0\}$ on selvästi suljettu G_δ-joukko, joten sen alkukuva jatkuvassa kuvauksessa on myös suljettu G_δ-joukko.

"$\Rightarrow$": Olkoon $A \subset X$ suljettu G_δ-joukko. Nyt sen komplementti $B = X \backslash A$ on F_σ-joukko, eli joidenkin suljettujen joukkojen B_i, $i \in \mathbb{N}$ yhdiste. Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ on jatkuva kuvaus $f_i : X \to I$, jolla pätee $f_i B_i = \{1\}$ ja $f_i A = \{0\}$, sillä joukot B_i ja A ovat suljettuja ja erillisiä. Määritelkäämme kuvaus $f : X \to I$ kaavalla

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} f_i(x).$$

Summafunktio f on selvästi olemassa ja lisäksi jatkuva, sillä äärelliset osasummat suppenevat tasaisesti kohti funktiota f. Selvästi $f(x) = 0$ ainoastaan silloin, kun $x \in A$, sillä jos $x \in X \backslash A$, niin $x \in B_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$ ja täten $f(x) \geq (1/2)^{i+1}$. □

Määritelmä 3.7. Topologinen avaruus X on *täysin normaali* (engl. *perfectly normal*), jos X on normaali ja lisäksi jokainen avaruuden X suljettu joukko on G_δ-joukko.

Huomautus 3.8. Täysin normaalissa avaruudessa jokainen suljettu joukko on siis alkukuva $f^{-1}\{0\}$, jollain jatkuvalla kuvauksella $f : X \to I$. Täten myös jokainen täysin normaalin avaruuden avoin joukko on muotoa $f^{-1}(0, 1]$, jollain jatkuvalla $f : X \to I$. Selvästi myös X on täysin normaali jos ja vain jos jokainen avaruuden X avoin joukko U on F_σ-joukko.

Lopuksi todistamme vielä riittävän ehdon avaruuden normaaliudelle. Tämäkin todistus perustuu Engelkingin kirjaan [3].

Lause 3.9. *Jos X on T_1-avaruus, jonka jokaista suljettua osajoukkoa $A \subset X$ ja sen ympäristöä $U \subset X$ kohti on olemassa jono $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avaruuden X avoimia joukkoja, jotka peittävät joukon A ja $\overline{U}_i \subset U$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin X on normaali.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ ja $B \subset X$ suljettuja ja erillisiä. On siis osoitettava, että niillä on erilliset ympäristöt. Nyt joukolla A on ympäristö $X \backslash B$ ja joukolla B on ympäristö $X \backslash A$. Oletuksen perusteella on olemassa jonot $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$, joilla $\overline{A}_i \cap B = \emptyset$ ja $\overline{B}_i \cap A = \emptyset$ ja jotka peittävät joukot A ja B.

Määritellään joukoille A ja B uudet peitteet. Olkoon

$$V_i = A_i \backslash (\bigcup_{j \leq i} \overline{B}_j) \text{ ja } \; W_i = B_i \backslash (\bigcup_{j \leq i} \overline{A}_j).$$

Jono $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on edelleen joukon A peite, samoin $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on joukon B peite. Lisäksi, jos $x \in V_i$ jollain $i \in \mathbb{N}$, niin $x \notin \overline{B}_j$ millään $j \leq i$ ja täten myöskään $x \notin W_j$. Lisäksi koska $x \in \overline{A}_i$, niin $x \notin W_j$, millään $j > i$. Tämä pätee myös toiseen suuntaan. Täten meillä on erilliset avoimet joukot

$$U_A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \text{ ja } \; U_B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i,$$

joilla lisäksi pätee $A \subset U_A$ ja $B \subset U_B$. Suljetuilla joukoilla A ja B on siis erilliset ympäristöt, joten X on normaali. $\square$

Luku 4

Metristyvät avaruudet

Määritelmä 4.1. Topologinen avaruus X on *metristyvä*, mikäli sille voidaan valita metriikka, joka antaa saman topologian.

Metristyvät avaruudet ovat siis metrisiä avaruuksia, joilta puuttuu metriikka. Seuraava lause kertoo, milloin metriikka ρ todella antaa avaruudelle X sen alkuperäisen topologian [3].

Lause 4.2. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Jatkuva metriikka $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ antaa avaruudelle X sen alkuperäisen metriikan jos ja vain, jos jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja pisteellä $x \in X \backslash A$ pätee $\rho(A, x) > 0$.*

Todistus. "$\Rightarrow$": jos ρ antaa avaruudelle X sen alkuperäisen topologian, niin voimme ajatella topologista avaruutta $(X, \mathcal{T})$ metrisenä avaruutena (X, ρ). Nyt metristen avaruuksien ominaisuuksien nojalla kaikille suljetuilla joukoilla A ja pisteillä $x \in X \backslash A$ pätee $\rho(A, x) > 0$.

"$\Leftarrow$": Olkoon $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ jatkuva metriikka, jolla lisäksi pätee $\rho(A, x) > 0$ kaikilla suljetuilla $A \subset X$ ja pisteillä $x \in X \backslash A$. Jokaisella $x \in X$ funktio $\rho_x : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva, missä $\rho_x(y) = \rho(y, x)$, sillä se on yhdiste jatkuvista kuvauksista.

Täten jokainen metriikan ρ r-pallo on avoin avaruudessa X, joten jokainen metrisen avaruuden (X, ρ) avoin joukko U on avoin myös topologisessa avaruudessa $(X, \mathcal{T})$. Jos $A \in \mathcal{T}$ on avoin, niin $X \backslash A$ on suljettu. Kaikilla $x \in A$ pätee $r_x = \rho(X \backslash A, x) > 0$. Täten avoin joukko A voidaan esittää yhdisteenä

$$A = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x, \frac{r_x}{2}),$$

joten jokainen topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ avoin joukko, on myös metrisen avaruuden (X, ρ) avoin joukko. Täten avaruuksien $(X, \mathcal{T})$ ja (X, ρ) topologiat ovat samat, mikä todistaa väitteen. $\square$

Määritelmä 4.3. Olkoon X topologinen avaruus. Kokoelma $\mathcal{B}$ avaruuden X osajoukkoja on *lokaalisti äärellinen*, mikäli jokaisella $x \in X$ on ympäristö $V \subset X$, jolla joukko

$$\{B \in \mathcal{B} \mid B \cap V \neq \emptyset\}$$

on äärellinen.

Kokoelma $\mathcal{B}$ avaruuden X osajoukkoja on σ-*lokaalisti äärellinen*, jos on olemassa lokaalisti äärelliset kokoelmat $\mathcal{B}_i$ $i \in \mathbb{N}$, joilla

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i,$$

eli $\mathcal{B}$ on lokaalisti äärellisten kokoelmien numeroituva yhdiste.

Tulemme pian näkemään, että jokaisella metristyvällä avaruudella on σ-lokaalisti äärellinen kanta, lause ja todistus perustuvat Engelkingin kirjaan [3]. Tämä on metristyvien avaruuksien yksi tärkeimmistä ominaisuuksista, ainakin niiden topologisen karakterisaation kannalta. Viimeisessä luvussa tulemme näkemään, että jokainen säännöllinen avaruus, jolla on σ-lokaalisti äärellinen kanta, on metristyvä.

Seuraavassa lauseessa käytämme hyväksemme *hyvinjärjestyslausetta* (engl. *well-ordering theorem*), jonka mukaan jokaiselle joukolle voidaan löytää hyvinjärjestys (katso esimerkiksi [3]).

Määritelmä 4.4. Joukon X järjestysrelaatio $<$ on *hyvinjärjestys*, mikäli jokaisella epätyhjällä osajoukolla $A \subset X$ on pienin alkio.

Vaikka jokaiselle joukolle voidaankin löytää hyvinjärjestys, eivät kaikki järjestykset ole hyvinjärjestyksiä. Esimerkiksi reaalilukujen $\mathbb{R}$ luonnollinen järjestys ei ole hyvinjärjestys, sillä esimerkiksi avoimella yksikkövälillä $(0, 1)$ ei ole pienintä alkiota. Toisaalta esimerkiksi luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ luonnollinen järjestys on hyvinjärjestys.

Lause 4.5. Stonen peitelause. *Jokaisella metristyvän avaruuden X avoimella peitteellä $\mathcal{A}$ on lokaalisti äärellinen tihennys $\mathcal{B}$. Eli jokaista $B \in \mathcal{B}$ kohti on $A \in \mathcal{A}$, joka sisältää joukon B.*

Todistus. Valitaan aluksi avaruudelle X metriikka ρ. Indeksoidaan peite $\mathcal{A}$ joukolla I, joka on lisäksi hyvinjärjestetty. Saamme siis indeksoidun peitteen $(A_i)_{i\in I}$. Nyt jokaiselle $x \in X$ on pienin indeksi $i \in I$, jolla $x \in A_i$. Merkitään tätä indeksiä symbolilla $\mu(x)$, jolloin siis oikeastaan saadaan kuvaus $\mu : X \to I$.

Muodostamme peitteen $(B_{ni})_{n\in\mathbb{N},i\in I}$, missä B_{ni} on yhdiste joistakin avoimista $(1/2)^n$-kuulista ja $B_{ni} \subset A_i$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ mielenkiintomme kohdistuu sellaisiin $c \in X$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. c ei kuulu yhteenkään joukoista B_{mi}, missä $m < n$ ja $i \in I$;
2. $B_\rho(c, 3(1/2)^n) \subset A_{\mu(c)}$.

Merkitään näiden pisteiden joukkoa C_n:llä. Nyt voimme määritellä joukot

$$B_{ni} = \bigcup\{B_\rho(c, \frac{1}{2^n}) \mid c \in C_n,\ \mu(c) = i\}.$$

Todistetaan vielä, että nämä joukot toteuttavat vaadittavat ehdot.

Selvästi $(B_{ni})_{n\in\mathbb{N},i\in I}$ on avaruuden X peite ja peitteen $\mathcal{A}$ tihennys. On vielä kuitenkin todistettava, että peite $(B_{ni})_{n\in\mathbb{N},i\in I}$ on lokaalisti äärellinen. Olkoot $x \in B_{ni}$ ja $y \in B_{nj}$, missä $i \neq j$. Edellisen konstruktion nojalla on olemassa pisteet $c_x, c_y \in C_n$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. $\rho(x, c_x) < \frac{1}{2^n}$ ja $\rho(y, c_y) < \frac{1}{2^n}$;
2. $\mu(c_x) = i$ ja $\mu(c_y) = j$;
3. $B_\rho(c_x, \frac{3}{2^n}) \subset A_i$ ja $B_\rho(c_y, \frac{3}{2^n}) \subset A_j$;
4. joko $c_x \notin A_j$, tai $c_y \notin A_i$ (muusta seuraisi $i = j$).

Kohtien 3 ja 4 perusteella $\rho(c_x, c_y) \geq 3(1/2)^n$. Nyt voidaan arvioida pisteiden x ja y välistä etäisyyttä:

$$\rho(x, y) \geq \rho(c_x, c_y) - \rho(c_x, x) - \rho(c_y, y) > \frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Mille tahansa pisteelle $x \in X$ voidaan siis valita ympäristö $B_\rho(x, (1/2)^{n+2})$, joka leikkaa enintään yhtä joukoista $(B_{ni})_{i\in I}$.

Olkoon $x \in X$. Nyt on olemassa B_{ni}, jolla $x \in B_{ni}$. Koska joukko B_{ni} on avoin, niin on olemassa $r > 0$, jolla $B_\rho(x, r) \subset B_{ni}$. Olkoon m_0 mikä tahansa luonnollinen luku, jolla $\frac{1}{2^{m_0}} < \frac{r}{2}$. Nyt kaikilla $m > m_0$ ja $j \in I$ pätee $B_\rho(x, (r/2)) \cap B_{mj} = \emptyset$, sillä joukko B_{mj} rakentuu kuulista $B_\rho(c, (1/2)^m)$, missä $c \in C_n$ ei voi kuulua joukkoon B_{ni}. Lisäksi kaikilla $m \leq m_0$ on olemassa ympäristö U_m, joka leikkaa enintään yhtä joukoista $(B_{mi})_{i\in I}$. Kun otamme näiden ympäristöjen leikkauksen, saamme pisteelle x ympäristön, joka leikkaa ainoastaan äärellisen montaa joukoista $(B_{ni})_{n\in\mathbb{N},i\in I}$. $\square$

Nyt σ-lokaalisti äärellisen kannan olemassaolo on helppoa todistaa.

Lause 4.6. *Jokaisella metristyvällä avaruudella on σ-lokaalisti äärellinen kanta.*

Todistus. Olkoon X metristyvä ja ρ sen metriikka. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ joukot

$$\mathcal{A}_n = \{B_\rho(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}.$$

Stonen peitelauseen mukaan kaikilla $n \in \mathbb{N}$ peitteelle $\mathcal{A}_n$ on olemassa lokaalisti äärellinen tihennys $\mathcal{B}_n$. Nyt

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

on avaruuden X σ-lokaalisti äärellinen peite. Todistetaan vielä, että se on avaruuden X kanta.

Olkoon $A \subset X$ avoin joukko. Nyt jokaisella $x \in A$ on reaaliluku $r_x > 0$, jolla $B_\rho(x, r_x) \subset A$. Olkoon n_x luonnollinen luku, jolla $1/n_x < r_x/3$. Koska joukko $\mathcal{B}_{n_x}$ on avaruuden X peite, niin on olemassa $U_x \in \mathcal{B}_{n_x}$, jolla $x \in U_x$. Lisäksi joukkojen $\mathcal{B}_n$ konstruktion ja luvun n_x valinnan nojalla joukon U_x läpimitta on pienempi kuin r_x. Täten $U_x \subset A$. Joukko A on esitettävissä muodossa

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x,$$

joten joukko B on avaruuden X kanta. □

Luvun lopuksi todistamme vielä, että metristyvät avaruudet ovat säännöllisiä.

Lause 4.7. *Jokainen metristyvä avaruus on säännöllinen.*

Todistus. Olkoon X metristyvä avaruus ja ρ sen metriikka. Olkoon lisäksi $A \subset X$ suljettu ja $b \in X \backslash A$. Nyt $r = \rho(A, b) > 0$, joten voidaan valita joukot $U_b = B_\rho(b, r/3)$ ja

$$U_A = \bigcup \{B_\rho(x, \frac{r}{3}) \mid x \in A\},$$

jotka ovat halutut joukkojen A ja $\{b\}$ erilliset ympäristöt. □

Luku 5

Metristyvyys

Tämän luvun päätarkoituksena on todistaa Nagatan-Smirnovin metristyvyyslause, joka antaa sekä riittävän, että välttämättömän ehdon topologisen avaruuden metristyvyydelle. Ensin tarvitsemme kuitenkin muutaman aputuloksen.

Lause 5.1. *Olkoon X topologinen avaruus ja B lokaalisti äärellinen joukko sen suljettuja osajoukkoja. Tällöin $\bigcup B$ on suljettu.*

Todistus. On siis todistettava, että joukon $\bigcup B$ komplementti on avoin. Olkoon $x \in X \backslash (\bigcup B)$. Nyt pisteellä x on ympäristö U_x, joka leikkaa vain äärellisen montaa joukon B alkiota, merkitään näitä $B_0, ..., B_n$. Joukko $U_x \backslash (B_0 \cup ... \cup B_n)$ on pisteen x ympäristö, joka on lisäksi erillinen joukosta $\bigcup B$. Täten joukko $X \backslash (\bigcup B)$ voidaan esittää avointen joukkojen yhdisteenä, joten se on avoin. □

Alamme olemaan jo lähellä Nagatan-Smirnovin metristyvyyslauseen todistamista. Kaikki jäljellä olevat määritelmät ja lauseet perustuvat Engelkingin kirjaan [3].

Lause 5.2. *Olkoon X säännöllinen avaruus, jolla on σ-lokaalisti äärellinen kanta. Tällöin se on täysin normaali.*

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

avaruuden X kanta, missä kokoelmat $\mathcal{B}_n$ ovat lokaalisti äärellisiä. Olkoon lisäksi U avoin joukko. Säännöllisyyden nojalla kaikilla $x \in U$ on luonnollinen luku $n_x \in \mathbb{N}$ ja ympäristö $V_x \in \mathcal{B}_{n_x}$, jolla $\overline{V}_x \subset U$. Olkoon X_n niiden pisteiden $x \in U$ joukko, joilla $n_x = n$. Kokoelma

$$\mathcal{U}_n = \{V_x \mid x \in X_n\} \subset \mathcal{B}_n$$

on lokaalisti äärellinen. Merkitään jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \bigcup \mathcal{U}_n,$$

joukko U_n on siis avoin joukko, jolle lisäksi pätee

$$\overline{U}_n = \bigcup \{\overline{V} \mid V \in \mathcal{B}_n\} \subset U,$$

sillä tämä on lokaalin äärellisyyden nojalla suljettu ja selvästi suppein suljettu joukko johon U_n sisältyy. Selvästi joukot U_n peittävät joukon U, sillä

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in X_n} V_x = \bigcup_{x \in U} V_x = U.$$

Oletetaan sitten, että meillä on suljettu joukko $A \subset X$ ja sen ympäristö U. Nyt edellisen kohdan perusteella on olemassa jono $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jolla $\overline{U}_n \subset U$ ja

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Täten lauseen 3.9 perusteella avaruus X on normaali, sillä säännöllinen avaruus on aina T_1-avaruus. Toisaalta koska $U_n \subset \overline{U}_n \subset U$, niin

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}_n.$$

Jokainen avaruuden X avoin joukko on siis F_σ-joukko, joten avaruus X on täysin normaali.

$\square$

Jokainen säännöllinen avaruus, jolla on σ-lokaalisti äärellinen kanta, on siis täysin normaali. Alamme olla jo lähellä Nagatan-Smirnovin metristyvyyslauseen todistusta. Ensin kuitenkin tarkastelemme pseodometriikoita.

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko. Kuvaus $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ on *pseudometriikka*, mikäli

1. $\rho(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$;

Pseudometriikat ovat siis melkein kuin metriikoita, mutta kahdella erillisellä pisteellä ei välttämättä ole aidosti positiivista etäisyyttä. Tietyissä tapauksissa joukosta pseudometriikoita saadaan metriikka.

Lause 5.4. *Olkoon X säännöllinen avaruus, ja $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ perhe jatkuvia pseudometriikoita, joilla $\rho_n(x,y) \leq 1$. Jos lisäksi jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja pisteellä $b \in X$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolla $\rho_n(A,x) > 0$, niin X on metrinen avaruus.*

Todistus. Olkoon
$$\rho = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\rho_n,$$
joka on jatkuva tasaisen suppenemisen nojalla. Lisäksi koska T_1-avaruuksissa yksiöt ovat suljettuja, on tehtävänannon oletuksen nojalla $\rho(x,y) > 0$ kaikilla $x, y \in X$, kun $x \neq y$. Täten kuvaus ρ on jatkuva metriikka.

Oletusten nojalla pätee myös, että jokaisen suljetun joukon ja siitä erillisen pisteen välinen etäisyys on aidosti positiivinen metriikassa ρ. Täten lauseen 4.2 mukaan metriikan ρ antama topologia on täsmälleen sama, kuin avaruuden X alkuperäinen topologia. □

Nyt pääsemme todistamaan Nagatan-Smirnovin metristyvyyslauseen, joka oli ensimmäisiä lauseita, joka karakterisoi metriset avaruudet täysin topologisin käsittein. Bingin metristyvyyslause, joka on hyvin samankaltainen, yhdistetään joskus tähän lauseeseen, jolloin saadaan Bingin-Nagatan-Smirnovin metristyvyyslause. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan Bingin versiota todisteta.

Lause 5.5. Nagatan-Smirnovin metristyvyyslause. *Topologinen avaruus X on metristyvä jos ja vain jos se on säännöllinen ja sillä on σ-lokaalisti äärellinen kanta.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Olemme jo todistaneet tämän suunnan luvussa 4.

"$\Leftarrow$":Olkoon $\mathcal{B}$ avaruuden X kanta, joka on muotoa
$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n,$$
missä joukot $\mathcal{B}_n$ ovat lokaalisti äärellisiä. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ konstruoimme pseudometriikan ρ_n, joilla saamme metriikan avaruudelle X lauseen 5.4 mukaisesti.

Olkoon $U \in \mathcal{B}_n$. Lauseen 5.2 mukaan avaruus X on täysin normaali, joten on olemassa jatkuva kuvaus $f_U : X \to I$, jolla $U = f_U^{-1}(0,1]$, sillä jokainen täysin normaalin avaruuden avoin joukko on esitettävissä tässä muodossa (huomautus 3.8). Tätä kuvausta vastaa jatkuva pseudometriikka $p_U : X \times X \to \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $p_U(x,y) = |f_U(x) - f_U(y)|$. Määritellään pseudometriikka ρ'_n kaavalla

$$\rho'_n = \sum_{U \in B_n} p_U.$$

Kuvaus on jatkuva ja hyvin määritelty: olkoon U_x ja U_y sellaiset pisteiden x ja y ympäristöt, joilla $f_U U_x \neq \{0\}$ ja $f_U U_y \neq \{0\}$ vain äärellisen monella $U \in \mathcal{B}_n$. Täten pisteen $(x,y) \in X \times X$ ympäristössä $U_x \times U_y$ kuvaus ρ'_n saadaan jatkuvien kuvausten äärellisenä summana, joten se on jatkuva tässä ympäristössä. Tällaisilla ympäristöillä voi peittää koko avaruuden $X \times X$, joten ρ'_n on jatkuva lauseen 2.14 nojalla.

Ongelmana on kuitenkin vielä se, että kuvaukset ρ'_n eivät ole rajoitettuja, emmekä voi suoraan soveltaa lausetta 5.4 niihin. Tämä on kuitenkin helppo korjata. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määrittelemme jatkuvan kuvauksen $\rho_n : X \times X \to \mathbb{R}$ kaavalla $\rho_n(x,y) = min(1, \rho'_n(x,y))$. Taas on ilmeistä, että kuvaukset ρ_n ovat pseudometriikoita.

Lisäksi jos $A \subset X$ on suljettu ja $x \in X \backslash A$, niin on olemassa luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ ja pisteen x ympäristö $U \in \mathcal{B}_n$, joka sisältyy joukkoon $X \backslash A$ ja jolla $x \in U$. Täten $\rho_n(A,x) > 0$. Nyt voimme soveltaa lausetta 5.4 kuvauksiin ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, joten avaruus X on metristyvä. □

Kirjallisuutta

[1] Jussi Väisälä: Topologia I., Limes ry, 2007

[2] Jussi Väisälä: Topologia II, Limes ry, 1999

[3] Ryszard Engelking: General Topology, Heldermann Verlag, 1989