

# IL TEOREMA DI SCHLÄFLI: UN INVITO ALLA QUARTA DIMENSIONE

CAMILLO DE LELLIS

## 1. INTRODUZIONE

I poligoni regolari sono tra gli oggetti piú classici della geometria piana, molti dei quali sono conosciuti da tutti sin dall'infanzia. Anche chi ha poche rudimentali nozioni di matematica sa che, a meno di traslazioni, rotazioni e omotetie, per ogni numero naturale  $n \geq 3$  c'è un solo poligono regolare  $P_n$  di  $n$  lati. È sicuramente noto ai cultori della nostra materia e a tante persone di ottima cultura che le analoghe figure tridimensionali, i cosiddetti *poliedri regolari*, o *solidi platonici*, sono molti meno. Infatti, a meno di omotetie e trasformazioni rigide dello spazio, sono solo cinque e, ordinati secondo il numero, crescente, delle loro facce, vengono chiamati comunemente tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. La *classificazione* dei poliedri regolari è uno dei teoremi piú belli e importanti della matematica dell'antichità, un classico tra i classici, anche se la sua dimostrazione non è poi cosí conosciuta.

Uno dei passatempi piú comuni dei matematici è quello di cercare opportune generalizzazioni dei teoremi piú belli e fondamentali. Non è quindi sorprendente che molti si siano chiesti cosa succede negli spazi euclidei di dimensione maggiore di tre. Esiste una generalizzazione significativa dei poliedri regolari (che chiameremo *politopi regolari*)? Si tratta di una domanda nient'affatto ovvia: anche solo concepire lo spazio quadridimensionale richiede un discreto sforzo di immaginazione e come definire i politopi quadridimensionali regolari va certamente oltre, per non parlare degli spazi con ancor piú dimensioni.

Il tema di questa piccola nota è il bellissimo teorema del grande matematico svizzero Ludwig Schläfli, che in una stupenda monografia scritta tra il 1850 e il 1852 propose quella che oggi viene accettata come la naturale definizione di politopo regolare, dando una classificazione completa di tali oggetti in ogni dimensione. Schläfli viene considerato oggi come uno dei tre ideatori della geometria multidimensionale, insieme con Cayley e Riemann. Tuttavia, benché fosse un matematico affermato, la sua poderosa monografia fu ignorata praticamente da tutti e venne pubblicata dalla Schweizerische Naturforschende Gesellschaft solo nel 1901, a 6 anni dalla morte, come volume alla sua memoria (si veda [Sch01]).

Molto probabilmente è grazie all'opera del matematico inglese Harold Coxeter che il geniale lavoro di Schläfli è conosciuto oggi da molti matematici. In uno degli ultimi giorni dello scorso millennio, nel tentativo di raggiungere oltre Gottardo la mia fidanzata di allora per festeggiare la fine dell'anno, rimasi bloccato per diverse ore nel mezzo delle alpi svizzere. Avevo con me il bellissimo libro di Coxeter intitolato *Regular polytopes* (si veda [Cox49]) e non ricordo perché, visto che come matematico faccio tutt'altro e la geometria non è mai stata il mio forte. Comunque, per caso, scoprii il teorema di Schläfli e lo trovai meraviglioso.

Una parte del teorema afferma che in una qualsiasi dimensione strettamente maggiore di 4 ci sono sempre solo tre politopi regolari, che sono la naturale generalizzazione del tetraedro, del cubo e dell'ottaedro e quindi in questa nota li chiameremo ipertetraedro, ipercubo e iperottaedro. Un qualsiasi matematico moderno, anche con l'intuizione geometrica di un cane come il sottoscritto, ci mette pochi secondi a realizzare l'esistenza di questi tre oggetti, ma che essi siano gli unici politopi regolari in dimensione maggiore di 4 è un fatto notevole e la dimostrazione di Schläfli è davvero ingegnosa (se vi state chiedendo come diavolo abbia fatto, vi basterà aspettare qualche sezione).

Tuttavia è la seconda parte del teorema che mi affascinò: in dimensione 4, oltre all'ipertetraedro, all'ipercubo e all'iperottaedro ci sono tre ulteriori politopi regolari, che spesso vengono chiamati 24-celle, 120-celle e 600-celle. Questi tre meravigliosi oggetti stanno ai loro tre cugini più semplici un po' come il dodecaedro e l'icosaedro stanno al tetraedro, al cubo e all'ottaedro. Provate a visualizzare il dodecaedro e l'icosaedro e potrete immaginare quanto complesso debba essere stato il lavoro di Schläfli per scoprire le tre bestie in più della dimensione 4. Per raggiungere un'idea un po' più accurata, considerate che le "celle" giocano, in dimensione più alta, il ruolo delle facce dei poliedri, sono insomma le "facce tridimensionali" nel caso dei politopi quadridimensionali. Come si può allora intuire dal nome, il 600-celle ha 600 facce tridimensionali e anche se il 120-celle, con un quinto delle celle del cugino, può sembrare più modesto, tenete in considerazione che le sue celle sono dodecaedri.

Quindici anni dopo essermi imbattuto nel teorema di Schläfli, in occasione del bicentenario della sua nascita, sono stato invitato a tenere a Locarno un corso di aggiornamento per gli insegnanti delle scuole medie superiori del Canton Ticino. È stato solo allora che ho scoperto che Schläfli era svizzero: non me ne vogliono i confederati, ma inizialmente avevo creduto che fosse tedesco! Questa nota (che dedico alla mia fidanzata del 1999) è un'elaborazione delle lezioni che ho tenuto a Locarno in occasione di quel corso di aggiornamento. In particolare quasi tutto il materiale si basa sul bel libro di Coxeter citato sopra. È chiaro che non potrò tenere un livello di rigore matematico sufficiente a soddisfare i più esigenti, vista la brevità della nota. La mia ambizione è di dare le idee principali della classificazione

di Schläfli rimanendo a un livello “intuitivo” e quindi usando il piú possibile considerazioni geometriche piuttosto che cartesiane e algebriche.

Se questa nota dovesse cadere in mano ad uno dei miei compagni di università sicuramente lo farebbe sorridere: di tutti ero decisamente il meno dotato di intuizione geometrica. Tuttavia per lo scopo che mi prefiggo non credo che la mia sia una grave deficienza: in genere è piú semplice seguire il passo di un buon amatore che quello di un atleta!

Per quanto i ragionamenti in cui ci inoltreremo non siano facili, è sufficiente conoscere la geometria piana, gli assi cartesiani e un pizzico di trigonometria per capire quasi tutto. Per quello che rimane basta un po’ di algebra lineare e di topologia. Per chi volesse approfondire l’argomento, il libro di Coxeter [Cox49] è pieno di gioielli geometrici (anche se, in molte occasioni, è abbastanza parco di spiegazioni), mentre un testo piú moderno che copre il materiale di questa nota è [Ded99]. Per quanto riguarda molti aspetti specifici darò ulteriori referenze lungo il cammino. [Cox49] è anche ricco di riferimenti storici: il teorema di Schläfli venne infatti riscoperto piú tardi da un paio di autori (ignari del lavoro del genio svizzero) e importanti contributi aggiuntivi sono stati dati nell’arco degli anni da svariati noti matematici. In questa nota farò riferimento solo a quel paio di contributi direttamente rilevanti per il materiale esposto e mi asterrò da commenti storici.

Infine, è inconcepibile scrivere un articolo divulgativo come questo senza dover aggiungere tante figure. Fino a un po’ di tempo fa anche la piú semplice delle figure tridimensionali contenute in questo testo mi sarebbe costata ore di lavoro, con risultati passabili ma non certo brillanti. Colgo allora l’occasione per ringraziare profondamente Mario Schulz, che mi ha fatto scoprire TikZ, un linguaggio sbalorditivamente efficace per creare figure praticamente perfette e che si integra in modo ottimale con il L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Un sentito ringraziamento va anche a Claudio Marsan e Laura Donati per le innumerevoli correzioni alla prima bozza del lavoro e a Daniele Folegnani per alcuni preziosi consigli.

**1.1. Una piccola guida per il lettore.** Visto che la nota è molto lunga, ho pensato fosse utile introdurre un paragrafo riassuntivo sul percorso che ci accingeremo a fare. Nella Sezione 2 esamineremo i poligoni regolari: in particolare ne ricorderemo la definizione, alcune proprietà importanti e la classificazione (si vedano la Definizione 2.1 e la Proposizione 2.3). Nella Sezione 3 passeremo ai poliedri regolari (i solidi platonici): introdurremo i loro simboli di Schläfli e ripasseremo le loro proprietà piú interessanti (si vedano la Definizione 3.6, il Teorema 3.7 e i Lemmi 3.8 e 3.9). Nelle Sezioni 4 and 5 ne daremo la classificazione (Teorema 4.2): dopo aver esaminato l’argomento classico che riduce il loro numero a cinque (Proposizione 4.1), nella Sezione 4 ne “costruiremo” quattro, ovvero il tetraedro, il cubo, l’ottaedro e l’icosaedro; la sezione successiva introdurrà l’importante concetto di dualità,

che useremo per derivare l'esistenza del dodecaedro da quella dell'icosaedro (Proposizione 5.1).

Nel resto della nota effettueremo un salto concettuale per scoprire cosa accade in dimensione piú alta. La Sezione 6, la prima di questa seconda parte, sarà dedicata a descrivere cosa intendiamo per spazi di dimensione quattro e oltre, mentre nella Sezione 7 definiremo i politopi regolari e i loro simboli di Schläfli, derivandone le proprietà piú importanti in analogia con quelle dei poligoni e dei poliedri (si vedano le Definizioni 7.1 e 7.3 e i Teoremi 7.5, 7.7, 7.8 e 7.9). La Sezione 8 sarà dedicata a studiare le varie restrizioni che i simboli di Schläfli dei politopi regolari devono soddisfare: i punti di arrivo di questa porzione centrale della nota saranno una lista dei “possibili politopi regolari” e la formulazione del Teorema di Schläfli, che asserisce che tutti i simboli della lista sono effettivamente realizzati (si vedano i Teoremi 8.3, 8.4 e 8.5). Le ultime quattro sezioni sono dedicate alla dimostrazione del teorema. Nella Sezione 9 costruiremo l'iperottaedro, l'ipercubo e l'iperottaedro in ogni dimensione (Proposizioni 9.1, 9.4 e 9.5), mentre le ultime tre saranno dedicate ai tre “politopi quadridimensionali eccezionali”: in particolare esamineremo le costruzioni di Cesaro e Gosset del 24-celle (si vedano, rispettivamente, il Teorema 10.3 e la Proposizione 10.7), la costruzione di Gosset del 600-celle (Teorema 11.1) e l'argomento di dualità che deriva l'esistenza del 120-celle da quella del 600-celle (Teorema 12.1). La nota contiene infine un'appendice con alcuni fatti essenziali sul pentagono regolare.

## 2. I POLIGONI REGOLARI

**2.1. Poligoni.** Un buon punto per cominciare la nostra esplorazione è la classica geometria piana, dove rivisiteremo argomenti ben noti che si riveleranno però molto utili anche in seguito (la prima parte di [Cox89] è un'ottima introduzione alla geometria euclidea, sufficientemente rigorosa ma impostata in modo “classico”; il lettore interessato invece a una assiomatizzazione piú moderna, che comunque nel nostro contesto non è centrale, può consultare [Gre93]). Un poligono è una regione finita del piano delimitata da un'unica curva spezzata che consiste di  $n$  segmenti congiungenti  $n$  vertici  $V_1, \dots, V_n$  e che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) i vertici sono tutti distinti;
- (b) ogni coppia  $(V_i, V_{i+1})$  dà gli estremi di un segmento (con la convenzione che  $V_{n+1} = V_1$ );
- (c) due segmenti possono avere solo un vertice in comune;
- (d) i segmenti con un vertice in comune giacciono su rette distinte.

Se un poligono ha  $n$  vertici, d'ora in poi lo chiameremo  $n$ -agono. Ovviamente, perché le condizioni (a), (b), (c) e (d) siano rispettate è necessario che i vertici siano almeno tre e, per non farci ridere dietro, i 3-agoni li chiameremo triangoli, così come i 4-agoni, i 5-agoni e i 6-agoni li chiameremo, rispettivamente, quadrilateri, pentagoni ed esagoni. Da 7 in poi lasciamo i

nomi specifici ai cultori della lingua italiana. Vale la pena soffermarsi un attimo sulla convenzione del punto (b): in contesti simili, in cui abbiamo una famiglia finita di oggetti indicizzata da un numero naturale che varia tra 1 e  $n$ , assumeremo tacitamente che il primo elemento è anche l' $n + 1$ -esimo.

**2.2. Poligoni regolari.** Un poligono è *regolare* se ha tutti i lati e tutti gli angoli (interni) uguali. Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un  $n$ -gono è  $(n - 2)\pi$ : la somma degli angoli interni di un triangolo è  $\pi$  e ogni  $n$ -gono è suddivisibile in  $n - 2$  triangoli, si veda la figura 1. Gli angoli di un  $n$ -gono regolare misurano, allora,  $\pi - \frac{2\pi}{n}$ , quindi ogni poligono regolare è *convesso*. In questa considerazione ho misurato gli angoli in radianti, una convenzione a cui mi atterrò scrupolosamente per il resto della nota.

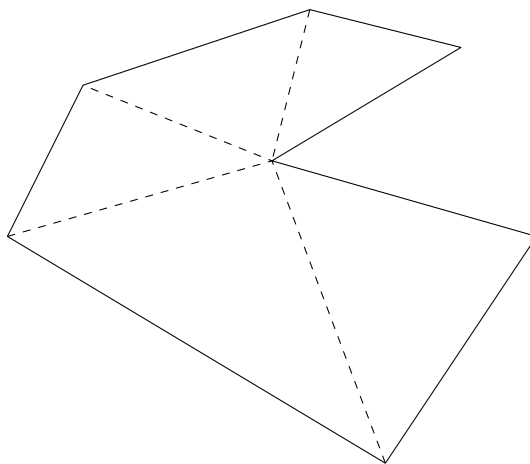


FIGURA 1. Un  $n$ -gono può essere suddiviso in  $n - 2$  triangoli, come si può facilmente mostrare per induzione sul numero dei lati.

Per gli sviluppi futuri, la seguente definizione alternativa di poligono regolare si rivelerà molto comoda.

**Definizione 2.1.** *Un poligono si dice regolare se*

- (i) *è convesso;*
- (ii) *tutti i lati sono congruenti;*
- (iii) *tutti i segmenti che congiungono i punti medi di due lati consecutivi sono congruenti.*

L'equivalenza con la solita definizione di poligono regolare è un semplice esercizio di geometria euclidea, anche se per completezza ne riporterò la dimostrazione. La condizione (i) è necessaria per squalificare esempi come quello nella figura 2.

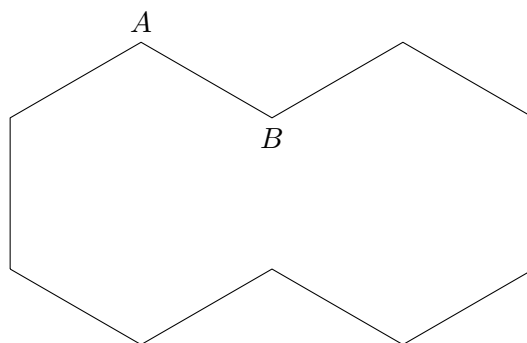


FIGURA 2. Il poligono della figura è l'unione di due esagoni regolari con un lato in comune: il poligono non è convesso ma soddisfa le condizioni (ii) e (iii) della Definizione 2.1.

**Lemma 2.2.** *Un poligono è regolare (secondo la Definizione 2.1) se e solo se tutti i lati e tutti gli angoli sono congruenti.*

Prima di riportare la semplice dimostrazione del lemma, mi preme avvertire il lettore che seguirò una notazione un po' meno precisa di quella usuale. Spesso e volentieri mi riferirò a un poligono giustapponendo il nome dei suoi vertici: pertanto incontreremo frequentemente il “quadrilatero  $ABCD$ ” e il “triangolo  $ABC$ ”. D'altra parte userò  $ABC$  anche per l'angolo formato da due segmenti consecutivi  $AB$  e  $BC$  di un qualsiasi poligono. Una notazione più coerente e più comune sarebbe  $\widehat{ABC}$ , che mi sembra, però, inutilmente pesante: la quasi totalità delle volte sarà assolutamente chiaro dal contesto se con  $ABC$  mi riferisco a un angolo o a un triangolo e quando potranno esserci dubbi mi limiterò ad aggiungere un piccolo chiarimento. Nei testi di geometria si usa spesso  $\overline{AB}$  per la lunghezza del segmento  $AB$ . Al posto di questa notazione userò  $|B - A|$ , assumendo tacitamente di aver fissato un sistema di assi cartesiani e identificando i punti con i vettori delle loro coordinate. Anche se mi rendo conto che questa convenzione farà inorridire i puristi, essa si rivelerà estremamente comoda in tre e quattro dimensioni quando, a scapito dell'eleganza ma a favore della brevità, opererò per qualche semplice calcolo cartesiano sacrificando più lunghe considerazioni geometriche.

*Dimostrazione.* Come già osservato, un poligono che ha gli angoli congruenti è convesso. Supponiamo ora che abbia sia i lati che gli angoli congruenti e chiamiamo  $A$  e  $B$  due vertici qualunque del poligono, mentre  $A_1, A_2$  e  $B_1, B_2$  denoteranno i vertici immediatamente adiacenti (si veda la figura 3). Se chiamiamo, rispettivamente,  $M_1, M_2, N_1$  e  $N_2$  i punti medi dei segmenti  $AA_1, AA_2, BB_1$  e  $BB_2$ , concludiamo che i triangoli  $M_1AM_2$  e  $N_1BN_2$  sono congruenti perché i lati  $M_1A, AM_2, N_1B$  e  $BN_2$  sono congruenti e gli angoli  $M_1AM_2$  e  $N_1BN_2$  sono congruenti. Ma allora anche i segmenti  $M_1M_2$  e  $N_1N_2$  sono congruenti. Abbiamo quindi mostrato che se un poligono ha i

lati e gli angoli tutti congruenti, allora soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii) della Definizione 2.1.

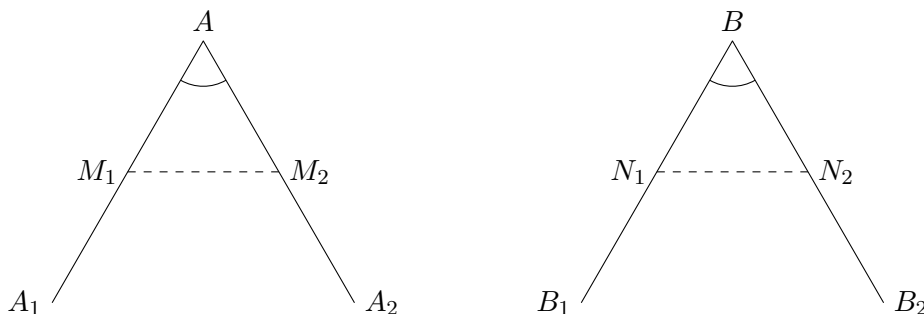


FIGURA 3. Nella definizione usuale di poligono regolare, così come nella Definizione 2.1,  $AM_1$ ,  $AM_2$ ,  $BN_1$  e  $BN_2$  sono congruenti. Nella definizione usuale si postula poi la congruenza degli angoli (interni) in  $A$  e  $B$ , mentre nella Definizione 2.1 postuliamo la congruenza dei segmenti  $M_1M_2$  e  $N_1N_2$ .

Viceversa, assumiamo che un poligono soddisfi le condizioni (ii) e (iii) della Definizione 2.1 e consideriamo di nuovo i triangoli  $M_1AM_2$  e  $N_1BN_2$ : essi sono congruenti perché tutti e tre i lati sono congruenti. Pertanto l'angolo in  $A$  del triangolo  $M_1AM_2$  e l'angolo in  $B$  del triangolo  $N_1BN_2$  sono congruenti. Se in aggiunta il poligono è convesso, questi due sono proprio gli angoli interni del poligono nei rispettivi vertici. Il lettore attento avrà notato che senza l'ipotesi di convessità questa conclusione non sarebbe valida. Un esempio è dato dai vertici  $A$  e  $B$  segnati nella figura 2, dove l'angolo del triangolo  $N_1BN_2$  non coincide con l'angolo (interno) in  $B$  del poligono. Infatti, pur rispettando le condizioni (ii) e (iii) della Definizione 2.1, il poligono della figura 2 non ha angoli interni congruenti.  $\square$

**2.3. Classificazione e proprietà.** Ricapiteremo ora alcuni fatti noti sui poligoni regolari e ne daremo anche le relative dimostrazioni, molte delle quali ci saranno utili in seguito, non solo come strumenti per trarre svariate conclusioni, ma anche come termini di paragone con opportune versioni tridimensionali e  $n$ -dimensionali.

**Proposizione 2.3.** *Per ogni  $n$  esiste un unico  $n$ -agono regolare, dove l'unicità va intesa nel seguente senso: se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due  $n$ -agoni regolari allora esistono un'omotetia  $O$ , una traslazione  $T$  e una rotazione  $R$  che portano  $\alpha$  su  $\beta$ , ovvero tali che  $R(O(T(\alpha))) = \beta$ .*

*Per ogni  $n$ -agono regolare esiste un unico punto  $O$ , che chiameremo centro, equidistante dai vertici (che pertanto giacciono su un cerchio comunemente chiamato circoscritto). Anche i punti medi dei lati dell' $n$ -agono sono equidistanti da  $O$  e giacciono quindi su un unico cerchio chiamato cerchio inscritto: inoltre ciascun lato è tangente a quest'ultimo nel suo punto medio.*

Se due  $n$ -agoni regolari  $\alpha$  e  $\beta$  hanno un lato in comune, allora o coincidono o sono uno il riflesso dell'altro lungo la retta che contiene il lato comune. In particolare se  $\alpha$  e  $\beta$  hanno tre vertici consecutivi in comune, allora devono coincidere.

Grazie alla prima parte della proposizione possiamo introdurre una notazione speciale per l' $n$ -agono regolare (o, se si vuole essere pignoli, per la famiglia degli  $n$ -agoni regolari).

**Definizione 2.4.** Un poligono regolare ha simbolo di Schläfli  $\{n\}$  se  $n$  è il numero dei suoi lati.

*Dimostrazione della Proposizione 2.3.* Innanzitutto dimostreremo la seconda parte della proposizione. Prendiamo in particolare un  $n$ -agono regolare qualsiasi e quattro vertici consecutivi  $A, B, C$  e  $D$  ( $D$  coincide con  $A$  se  $n = 3$ ). Prendiamo poi gli assi dei segmenti  $AB$  e  $BC$ , ovvero le rette  $r$  e  $s$  perpendicolari ai rispettivi segmenti e che passano per i loro punti medi  $M$  e  $N$  (si veda la figura 4).

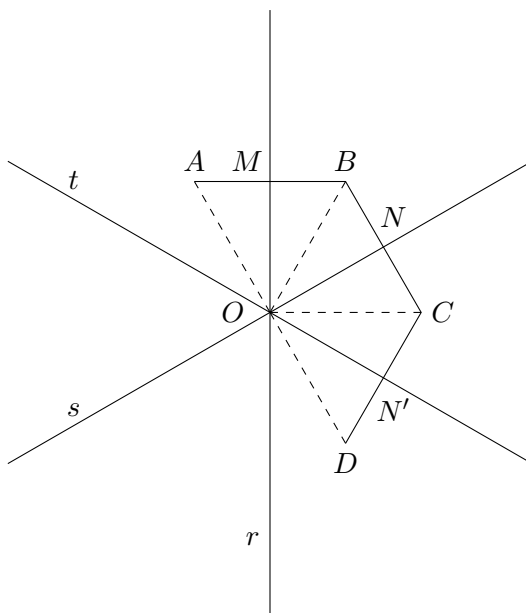


FIGURA 4

Visto che  $r$  e  $s$  non sono parallele, si intersecano in unico punto  $O$ . Inoltre, per costruzione, i triangoli  $OAB$  e  $OBC$  sono isosceli. Visto che i lati  $AB$  e  $BC$  sono congruenti, i due triangoli sono congruenti e quindi le altezze sono congruenti: i punti  $M$  e  $N$  sono, pertanto, equidistanti da  $O$ . Ma anche i punti  $A, B$  e  $C$  sono equidistanti da  $O$ . Notiamo inoltre che l'angolo  $ABO$  e l'angolo  $CBO$  sono congruenti e quindi misurano metà dell'angolo  $ABC$ : in particolare il punto  $O$  giace sulla bisettrice dell'angolo  $ABC$ . Visto poi



che l'angolo  $ABC$  è congruente a  $BCD$  e che l'angolo  $CBO$  è congruente a  $BCO$  concludiamo anche che  $O$  si trova sulla bisettrice di  $BCD$ . Sia ora  $t$  l'asse del segmento  $CD$ , che lo interseca nel punto medio  $N'$ . Chiamiamo  $O'$  l'intersezione tra  $t$  e  $s$ : ripetendo il ragionamento di sopra concludiamo che la retta passante per  $O'$  e  $C$  è la bisettrice dell'angolo  $BCD$ . Ma allora  $O'$  è l'intersezione tra l'asse di  $BC$  e la bisettrice di  $BCD$  e deve pertanto coincidere con  $O$ . In particolare, ripetendo l'argomento di sopra, scopriamo che  $OD$  è congruente a  $OC$  e che  $ON'$  è congruente a  $ON$ . Iterando l'argomento su tutte le triple di vertici dell' $n$ -gono concludiamo che  $O$  è equidistante sia dai vertici che dai punti medi dei lati. Segue anche dalla costruzione che il segmento che congiunge il punto medio di un lato con  $O$  è perpendicolare al lato stesso: pertanto ogni lato deve essere tangente al cerchio di centro  $O$  passante per i punti medi dei lati.

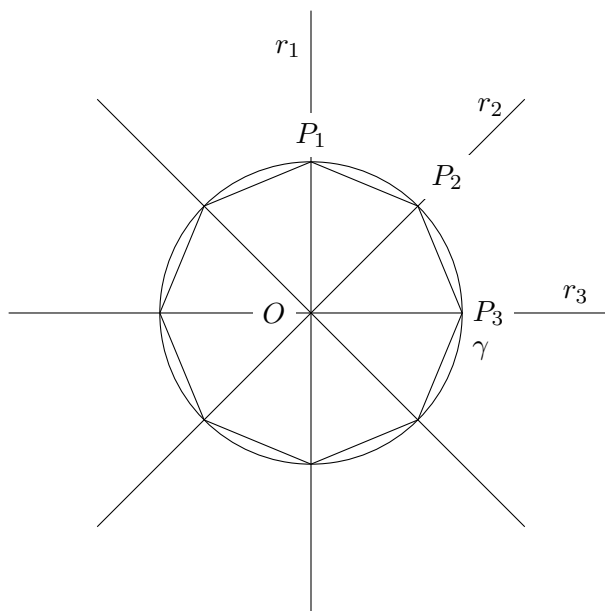


FIGURA 5

Passiamo ora alla prima affermazione della proposizione. Dato  $n \geq 3$  consideriamo un cerchio  $\gamma$  di centro  $O$  e suddividiamo l'angolo giro in  $n$  angoli uguali, usando le semirette  $r_1, \dots, r_n$ , come in figura 5. Siano  $P_1, \dots, P_n$  i rispettivi punti di intersezione con il cerchio: il poligono che ha per vertici tali punti è chiaramente regolare. Infatti i segmenti  $P_{i-1}P_i$  e  $P_{j-1}P_j$  sono congruenti perché sottendono archi congruenti; pertanto il poligono ha tutti i lati uguali. D'altra parte i triangoli  $P_{i-1}OP_i$  e  $P_{j-1}OP_j$  sono tutti congruenti ed isosceli in  $O$ . Quindi l'angolo  $P_{i-1}P_iP_{i+1}$  è il doppio dell'angolo  $P_{i-1}P_iO$  e in particolare è congruente all'angolo  $P_{j-1}P_jP_{j+1}$  (ricordiamo che se  $i = n$ , o  $j = n$ , allora intendiamo  $P_{i+1} = P_1$ , o  $P_{j+1} = P_1$ ).

Consideriamo ora due poligoni regolari  $\alpha$  e  $\beta$  di  $n$  lati e siano  $O$  e  $O'$  i rispettivi centri. Con una traslazione possiamo spostare  $O'$  in  $O$  e forzando la notazione continueremo a chiamare  $\beta$  il poligono traslato. Dopo aver applicato una omotetia di centro  $O$  possiamo assumere che il cerchio circoscritto a  $\beta$  coincida con quello circoscritto a  $\alpha$ . In particolare tutti i vertici di  $\alpha$  e  $\beta$  si trovano su uno stesso cerchio  $\gamma$ . Dopo un'opportuna rotazione possiamo assumere anche che un vertice  $A$  di  $\alpha$  coincida con un vertice  $A'$  di  $\beta$ . Chiamiamo  $B$  e  $B'$  i primi vertici di  $\alpha$  e  $\alpha'$  che si incontrano partendo da  $A$  e andando in senso orario lungo  $\gamma$ . Visto che  $AB'$  e  $AB$  sottendono un arco con lo stesso angolo al centro, abbiamo  $B = B'$ . Ne segue facilmente che i vertici di  $\alpha$  e  $\beta$  coincidono.

Passiamo all'ultima affermazione della proposizione e consideriamo due poligoni regolari  $\alpha$  e  $\beta$  di  $n$  lati con un lato  $AB$  in comune. Siano  $O$  e  $O'$  i rispettivi centri. Entrambi giacciono sull'asse  $s$  di  $AB$  e inoltre sono alla stessa distanza dal punto medio di  $AB$ , come si evince dagli argomenti sopra esposti. Pertanto o  $O = O'$  oppure  $O$  è il simmetrico di  $O'$  rispetto alla retta  $r$  che contiene  $A$  e  $B$  (si veda la figura 6). Nel primo caso segue dal paragrafo sopra che  $\alpha = \beta$ . Nel secondo caso, se chiamiamo  $\beta'$  il riflesso di  $\beta$  lungo la retta, allora  $\alpha$  e  $\beta'$  hanno lati congruenti, un vertice in comune e lo stesso centro: di nuovo concludiamo dal paragrafo precedente che  $\alpha = \beta'$ .  $\square$

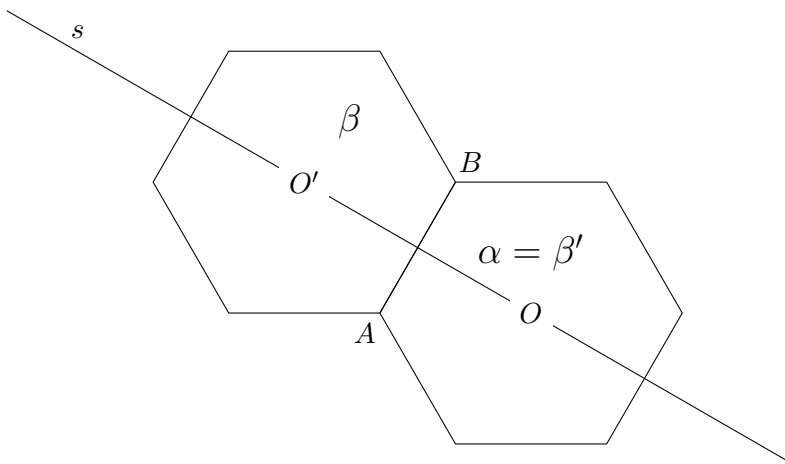


FIGURA 6

**2.4. Un'utile caratterizzazione.** Un semplice corollario degli argomenti della sezione precedente è il seguente fatto, che si rivelerà molto utile in seguito.

**Corollario 2.5.** *Un poligono con tutti i lati uguali inscritto in un cerchio è necessariamente regolare. Inoltre due poligoni regolari che hanno lo stesso lato e lo stesso raggio del cerchio circoscritto sono necessariamente congruenti.*

## 3. POLIEDRI CONVESSI E REGOLARI

**3.1. Poliedri convessi.** La definizione rigorosa del poliedro, l'analogo tridimensionale del poligono, è certamente molto piú laboriosa. Innanzitutto continueremo a chiamare poligono ogni regione di un qualsiasi piano bidimensionale dello spazio che soddisfi i criteri della sezione precedente. Poi considereremo un poliedro come una regione finita dello spazio tridimensionale delimitata da una frontiera che si ottiene “incollando” un numero finito di poligoni (le *facce* del poliedro) lungo i rispettivi lati (gli *spigoli*), sotto l'ipotesi che ciascuno spigolo sia in comune ad esattamente due facce e che due facce con uno spigolo in comune non giacciano nello stesso piano. I *vertici* del poliedro sono ovviamente i vertici degli spigoli. Questa definizione (che in realtà lascia ancora a desiderare in quanto a rigore) è comunque relativamente laboriosa da generalizzare in dimensione piú alta e seguiremo pertanto una via alternativa molto rapida, che ha l'unica pecca di limitare la nostra discussione ai poliedri *convessi*.

Innanzitutto considereremo lo spazio tridimensionale come dotato di tre assi cartesiani. Quindi a tutti gli effetti un punto dello spazio sarà sempre identificato con un vettore tridimensionale, ovvero con una terna di numeri reali. Com'è d'uopo, questo approccio ci permette di “algebrizzare” ogni problema (anche se cercheremo di farlo il meno possibile): in particolare useremo lo stesso simbolo per il punto dello spazio e il vettore che lo identifica nel nostro sistema di coordinate e saremo poi liberi di sommare tali vettori, sottrarli e moltiplicarli per uno scalare. Per esempio, dati due punti  $P$  e  $Q$  dello spazio, il segmento  $\sigma$  con estremi  $P$  e  $Q$  è semplicemente l'insieme dei punti  $\{\lambda P + (1 - \lambda)Q : \lambda \in [0, 1]\}$ . Inoltre, dati due punti  $P$  e  $Q$ , la loro distanza è il modulo del vettore  $P - Q$  (che denoteremo con  $|P - Q|$ ), dove il modulo di un vettore è (come al solito) la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti. Pertanto, come ho già menzionato nel capitolo precedente, useremo  $|P - Q|$  anche per indicare la lunghezza del segmento  $PQ$ . La seconda parte del testo [Cox89] contiene sia una buona introduzione alla geometria analitica nel piano e nello spazio, che alla geometria solida in senso classico. Un testo piú avanzato, che risulterà in particolare utile anche per affrontare gli spazi di dimensione piú alta, è [AC09].

**Definizione 3.1.** *Un sottoinsieme  $\Omega$  dello spazio tridimensionale si dice convesso se contiene ogni segmento che ha per estremi una qualsiasi coppia di punti  $P, Q \in \Omega$ . Un punto  $P$  di un insieme convesso  $\Omega$  viene detto estremo se  $\Omega$  non contiene alcun segmento che contenga  $P$ .*

Per chi avesse solo vaghe nozioni di topologia, ricordiamo che un punto  $P$  di una regione  $\Omega$  dello spazio si dice interno se esiste un numero  $\varepsilon$  positivo tale che tutti i punti  $Q$  a distanza al piú  $\varepsilon$  da  $P$  appartengano a  $\Omega$ . La frontiera di  $\Omega$  è allora data da quei punti che non sono né interni a  $\Omega$ , né interni al suo complementare; inoltre un insieme  $\Omega$  si dice chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera (questa è, bene o male, tutta la topologia di cui avremo

bisogno nelle nostre considerazioni; il lettore interessato ad approfondire può consultare il testo introduttivo [Jan94]). Siamo allora pronti per definire i poliedri convessi.

**Definizione 3.2.** *Un poliedro convesso è una regione dello spazio chiusa, limitata e convessa che possiede un numero finito di punti estremali e almeno un punto interno.*

Possiamo ora suddividere la frontiera di un poliedro convesso in vertici, spigoli e facce, con il seguente procedimento:

- i vertici sono i punti estremali;
- le facce sono quei poligoni dati dall'intersezione di un piano con il poliedro e che sono interamente contenuti nella frontiera;
- gli spigoli sono i lati della facce.

Visto che la convessità è preservata per le intersezioni, si verifica facilmente che le facce di un poliedro convesso sono poligoni convessi. Va notato che in quest'ultima affermazione sto un po' barando. Infatti, per i poligoni, la definizione di convessità è stata data nella sezione precedente usando la misura degli angoli interni. Dovrei quindi verificare che un poligono convesso nell'accezione di questa sezione (ovvero con la proprietà che ogni segmento con punti estremi contenuti nel poligono è interamente contenuto nel poligono) è convesso nell'accezione della sezione precedente (ovvero ha tutti gli angoli interni minori di  $\pi$ ). Lascero' questa verifica al lettore, anche se non è completamente banale.

**Osservazione 3.3.** *Una conseguenza fondamentale della convessità, che useremo più volte, è che se  $\varkappa$  è un piano che contiene una faccia di un poliedro convesso  $\Omega$ , allora  $\Omega$  si trova “da una sola parte” rispetto a  $\varkappa$ .*

**3.2. Poliedri regolari.** Dato un vertice  $V$  di un poliedro convesso  $\Omega$ , immaginiamo le semirette uscenti da  $V$  che contengono gli spigoli che hanno  $V$  come uno dei punti estremi. Per ogni coppia di spigoli che hanno  $V$  in comune e sono lati di una faccia, consideriamo il piano contenente le due semirette associate e l'angolo da esse delimitato nel piano. Tutti questi angoli “incollati” insieme suddividono lo spazio tridimensionale in due regioni, una delle quali contiene  $\Omega$  (si ricordi l'Osservazione 3.3): quest'ultima è l'angolo solido di  $\Omega$  al vertice  $V$  (si veda la parte destra della figura 7). Analogamente, dato un lato  $L$  e le due facce  $F_1$  e  $F_2$  che hanno  $L$  in comune possiamo considerare la retta  $r$  che contiene  $L$  e i due semipiani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  che hanno  $r$  in comune e contengono, rispettivamente,  $F_1$  e  $F_2$ . Questi due semipiani suddividono lo spazio tridimensionale in due regioni: quella che contiene  $\Omega$  è l'angolo diedro di  $\Omega$  nello spigolo  $L$  (si veda di nuovo la figura 7).

In genere si definiscono i poliedri regolari come quei poliedri le cui facce sono poligoni regolari e tali che facce, angoli diedri e angoli solidi siano congruenti. Questa definizione è già relativamente laboriosa in 3 dimensioni e si può facilmente immaginare le complicazioni che incontreremmo nell'estenderla in dimensione più alta. È per questo che, in analogia con la Definizione

2.1, seguiremo un'altra strada e introdurremo l'importante nozione di figura al vertice.

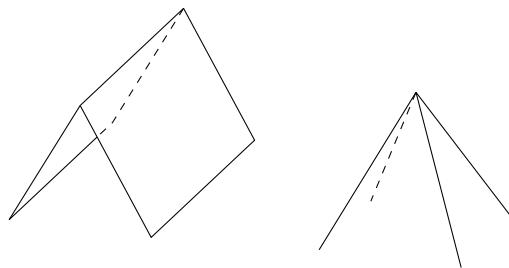


FIGURA 7. A sinistra un esempio di angolo diedro, a destra un esempio di angolo solido.

**Definizione 3.4.** Consideriamo un poliedro convesso  $\Omega$ , un vertice  $V$  e gli spigoli  $L_1, L_2, \dots, L_q$  che hanno  $V$  come estremo, ordinati in modo che  $L_i$  e  $L_{i+1}$  siano lati di una stessa faccia per ogni  $i$ . Siano  $M_1, \dots, M_q$  i loro punti medi: se i  $q$  segmenti che congiungono  $M_i$  con  $M_{i+1}$  appartengono a uno stesso piano, allora il poligono delimitato da essi verrà chiamato figura al vertice  $V$  (si veda la figura 8). Un poliedro convesso si dice regolare se:

- (i) tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti;
- (ii) per ogni vertice  $V$  esiste la rispettiva figura al vertice e tutte le figure al vertice sono poligoni regolari congruenti.

**Osservazione 3.5.** Consideriamo  $\Omega$ ,  $V$ ,  $L_1, \dots, L_q$  e  $M_1, \dots, M_q$ , come nella Definizione 3.4. Una omotetia di centro  $V$  e fattore 2 mappa gli  $M_i$  nei rispettivi  $A_i$ , comunemente chiamati vertici adiacenti a  $V$  (si veda la figura 8). Pertanto gli  $M_i$  sono complanari se e solo se i vertici adiacenti a  $V$  sono complanari. Non solo, in tal caso la figura che si ricava intersecando il poliedro  $\Omega$  con il piano su cui giacciono i vertici adiacenti è omotetica alla figura al vertice.

Questa semplice osservazione ci farà comodo in svariati casi. Ovviamente ne segue che avremmo potuto definire la figura al vertice senza introdurre i punti medi degli spigoli e, conseguentemente, definire la regolarità del poliedro facendo riferimento solo ai suoi vertici. Tuttavia la definizione che abbiamo dato, oltre a essere quella comune, ha l'indubbio vantaggio di facilitare, in molti casi, la visualizzazione degli oggetti in esame.

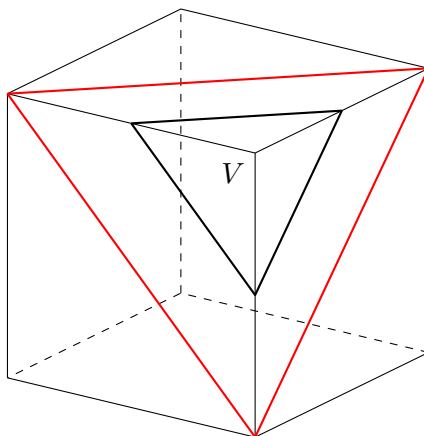


FIGURA 8. La figura al vertice di un cubo è un triangolo equilatero. Notiamo la figura omotetica formata dai vertici adiacenti a  $V$ .

**3.3. Simboli e proprietà.** Dato un poliedro regolare abbiamo due mattoni fondamentali per la sua costruzione: il poligono regolare che descrive le sue facce e quello che descrive le figure al vertice.

**Definizione 3.6.** Sia  $\Omega$  un poliedro regolare. Se  $\{p\}$  e  $\{q\}$  sono i simboli, rispettivamente, delle facce e delle figure al vertice, allora il simbolo di Schläfli del poliedro è  $\{p, q\}$ .

Come in dimensione 2, il simbolo di Schläfli caratterizza, a meno di omotetie e movimenti rigidi, il corrispondente poliedro regolare.

**Teorema 3.7.** Due poliedri con lo stesso simbolo di Schläfli sono congruenti a meno di omotetie. Inoltre, se due poliedri con lo stesso simbolo di Schläfli hanno un vertice e la corrispondente figura al vertice in comune, allora sono congruenti.

Per dimostrare il teorema ci saranno utili alcune proprietà elementari.

**Lemma 3.8.** Se  $V$  e  $V'$  sono due vertici di un poliedro regolare allora c'è un movimento rigido che mappa il poliedro in sé e  $V'$  in  $V$ . Analogamente se  $F, F'$  e  $G, G'$  sono due coppie di facce adiacenti, allora c'è un movimento rigido che mappa il poliedro in sé e la prima coppia nella seconda.

Infine se  $F$  è la figura al vertice in  $V$ ,  $r$  la retta che passa per  $V$  e per il centro di  $F$  e  $T$  un movimento rigido dello spazio che fissa  $r$  e mappa  $F$  in sé, allora  $T$  mappa il poliedro in sé.

**Lemma 3.9.** Se  $\Omega$  è un poliedro regolare allora esiste un unico punto  $O$  (chiamato centro) equidistante dai suoi vertici. I punti medi degli spigoli sono equidistanti da  $O$ , così come i centri delle facce. Le corrispondenti sfere di centro  $O$  vengono chiamate circoscritta, medioinscritta e inscritta e inoltre ogni faccia del poliedro è tangente, nel suo centro, alla sfera inscritta.

*Dimostrazione del Lemma 3.8.* Fissiamo un vertice  $V$  e un vertice  $V'$  e consideriamo:

- la piramide  $\alpha$  formata da  $V$  e dalla figura al vertice in  $V$ , che chiameremo  $B$ ;
- la piramide  $\alpha'$  formata da  $V'$  e dalla figura al vertice in  $V'$ , che chiameremo  $B'$ .

Dal teorema di Pitagora segue che i piedi delle altezze sono equidistanti dai vertici di  $B$  e  $B'$ , ovvero sono i centri delle basi. I lati di  $B$  sono congruenti a quelli di  $B'$  perché sono segmenti che congiungono punti medi di coppie di lati consecutivi di poligoni regolari congruenti. Ma anche i segmenti che congiungono  $V$  con i vertici di  $B$  sono congruenti a quelli che congiungono  $V'$  con i vertici di  $B'$ : quindi le altezze sono congruenti. Ma allora  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono congruenti e quindi c'è un movimento rigido che porta una piramide sull'altra: basta prima traslare  $V'$  in  $V$ , poi effettuare una rotazione che mappi l'altezza di una piramide nell'altezza dell'altra e infine una rotazione che fissi l'altezza e mappi una base sull'altra.

Il movimento rigido appena descritto mappa la figura al vertice di  $\alpha$  in  $\alpha'$  e quindi l'ultima parte del lemma implica la loro congruenza. Con la stessa strategia concludiamo facilmente anche la parte centrale del lemma. Infatti, sia  $\sigma$  lo spigolo comune a  $F$  e  $F'$  e  $\tau$  lo spigolo comune a  $G$  e  $G'$ . Siano  $V$  e  $V_1$  gli estremi di  $\sigma$  e  $V'$  e  $V'_1$  gli estremi di  $\tau$ . Dalla prima parte del lemma possiamo assumere, senza perdita di generalità, che  $V = V'$ . Ora  $V_1$  e  $V'_1$  sono due vertici alla base di una piramide che è omotetica (con un'omotetia di centro  $V$  e fattore 2) alla piramide formata da  $V$  e dalla figura al vertice in  $V$ . Visto che la base di tale piramide è un poligono regolare, un'opportuna rotazione di asse  $r$  (la retta passante per  $V$  e contenente l'altezza della piramide) fa in modo che  $V'_1$  venga mappato in  $V_1$  e quindi che  $\tau$  venga mappato in  $\sigma$ . D'altra parte l'ultima affermazione del lemma garantisce che il movimento rigido mappa il poliedro in sé. Le due facce  $G$  e  $G'$  sono inoltre mappate in una coppia di facce che ha  $\sigma$  come segmento comune, ovvero nella coppia  $(F, F')$ .

Veniamo all'ultima parte del lemma. Supponiamo che due poliedri regolari  $\alpha$  e  $\alpha'$  abbiano lo stesso vertice  $V$  e la stessa figura al vertice  $F$ . Allora tutte le facce che hanno  $V$  come vertice sono comuni a due poliedri, grazie alla Proposizione 2.3. Sia ora  $\sigma$  uno spigolo di  $\alpha$  che ha  $V$  come estremo e chiamiamo  $V_1$  l'altro.  $\sigma$  è in comune a due facce  $F$  e  $G$ , che sono sia facce di  $\alpha$  che di  $\alpha'$ . In particolare tre vertici consecutivi della figura al vertice di  $V_1$  appartengono sia ad  $\alpha$  che ad  $\alpha'$ : dalla Proposizione 2.3 concludiamo che le due figure al vertice (di  $\alpha$  e  $\alpha'$ ) in  $V_1$  coincidono. Allora tutte le facce che hanno  $V_1$  come vertice coincidono. Procedendo in questo modo dimostriamo via via che ogni vertice di  $\alpha$  è anche un vertice di  $\alpha'$ .  $\square$

*Dimostrazione del Lemma 3.9.* Consideriamo uno spigolo  $L$  del poliedro regolare  $\Omega$  e chiamiamo  $F_1$  e  $F_2$  le due facce che hanno  $L$  in comune. Siano

$M$  il punto medio di  $L$  e  $O_1$  e  $O_2$  i centri delle facce  $F_1$  e  $F_2$ . La retta  $h_1$  passante per  $O_1$  e  $M$  è ortogonale allo spigolo  $L$  (si veda la figura 9).

Analogamente la retta  $h_2$  passante per  $O_2$  e  $M$  è ortogonale a  $L$ . Pertanto il piano  $\varkappa$  generato da  $h_1$  e  $h_2$  è il piano ortogonale a  $L$ . In particolare  $\varkappa$  è ortogonale sia al piano contenente  $F_1$  che al piano contenente  $F_2$ . Ne segue che la retta  $r_1$  ortogonale alla faccia  $F_1$  e passante per  $O_1$  appartiene al piano  $\varkappa$ , così come l'analogia retta  $r_2$ . Queste due rette sono allora complanari, ma non parallele (perché se fossero parallele  $F_1$  e  $F_2$  sarebbero complanari). Chiamiamo  $O$  il loro punto di intersezione. I triangoli  $OO_1M$  e  $OO_2M$  sono allora rettangoli, hanno i cateti  $MO_1$  e  $MO_2$  congruenti e l'ipotenusa  $OM$  in comune. Ne segue che sono triangoli congruenti e quindi che il punto  $O$  è equidistante dai centri  $O_1$  e  $O_2$ .

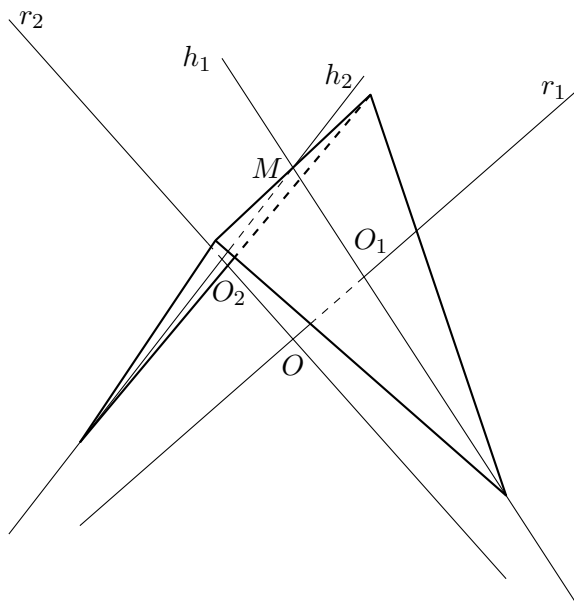


FIGURA 9. La costruzione del centro di un poliedro regolare (in questo esempio un tetraedro) partendo da due facce.

Fissiamo una terza faccia  $F_3$  che ha uno spigolo in comune con  $F_1$  e identifichiamo in modo analogo un punto  $O'$  sulla retta  $r_1$ , equidistante dai centri di  $F_1$  e  $F_3$ . Grazie al Lemma 3.8 c'è un movimento rigido che mappa il poliedro in sé e la coppia  $(F_1, F_2)$  nella coppia  $(F_1, F_3)$ . In particolare la lunghezza di  $OO_1$  è pari a quella del segmento  $O'O_1$ . Visto che  $O$  e  $O'$  si trovano dalla stessa parte rispetto al piano che include la faccia  $F_1$ , giacciono entrambi sulla retta  $r_1$  e si trovano alla stessa distanza da  $O_1$ , abbiamo necessariamente  $O = O'$ . Ne concludiamo, allora, che i centri delle facce  $F_1, F_2$  e  $F_3$  sono equidistanti da  $O$ .

Date ora due facce  $F$  e  $F'$  si trovano  $k$  facce  $F = F_1, F_2, \dots, F_k = F'$  con la proprietà che ciascuna coppia  $F_{i-1}, F_i$  (con  $k \geq i \geq 2$ ) ha uno spigolo in



comune. Iterando l'argomento concludiamo che  $O$  è equidistante dai centri di  $F$  e di  $F'$ . In particolare tutti i centri della facce di  $\Omega$  giacciono su una stessa sfera, che è appunto la sfera inscritta a  $\Omega$ . Visto che  $O$  giace sulla retta ortogonale alla faccia  $F$  e passante per il suo centro, la faccia  $F$  è tangente alla sfera inscritta.

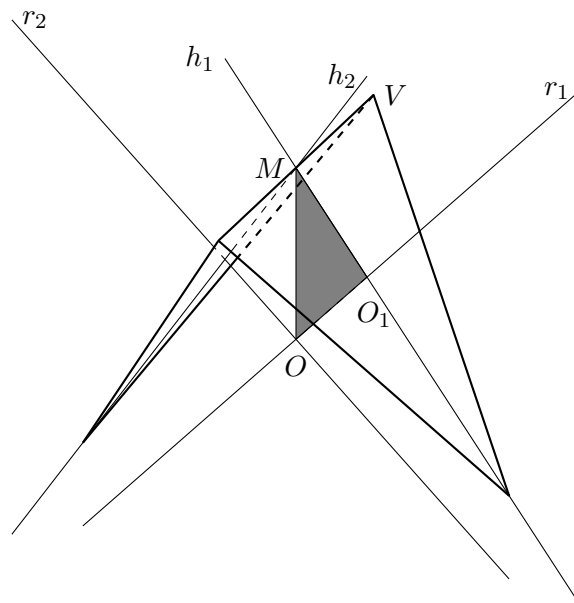


FIGURA 10

Tornando allo spigolo  $L$ , la distanza tra  $O$  e  $M$  si calcola usando il Teorema di Pitagora sul triangolo  $OO_1M$  (si veda la figura 10). Ne segue facilmente che i punti medi degli spigoli giacciono anch'essi su una stessa sfera di centro  $O$  (appunto la *sfera medioinscritta*). Infine, se  $V$  è uno degli estremi di  $L$ , la distanza tra  $L$  e  $O$  si calcola anch'essa con il teorema di Pitagora: il triangolo  $OMV$  è infatti retto in  $M$  perché il segmento  $OM$  giace sul piano  $\alpha$ , che è perpendicolare al lato  $L$  (si veda la figura 11). Pertanto ne concludiamo facilmente che anche i vertici di  $\Omega$  si trovano su una sfera di centro  $O$  (la sfera circoscritta a  $\Omega$ ).  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 3.7.* Supponiamo senza perdita di generalità che  $\alpha$  e  $\alpha'$  siano due poliedri con lati congruenti e con lo stesso simbolo di Schläfli. Allora, procedendo come nella dimostrazione del Lemma 3.8, tramite un movimento rigido possiamo portare un vertice  $V$  di  $\alpha$  in un vertice  $V'$  di  $\alpha'$  e al contempo portare la figura al vertice  $F$  in  $V$  nella figura al vertice  $F'$  in  $V'$ . L'argomento dell'ultima parte della dimostrazione del Lemma 3.8 garantisce che questo movimento rigido mappa un poliedro nell'altro.  $\square$

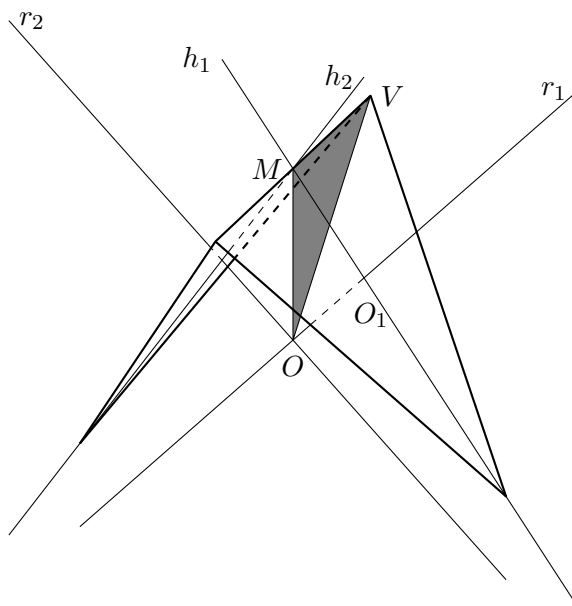


FIGURA 11

## 4. LA CLASSIFICAZIONE DEI POLIEDRI REGOLARI

Consideriamo ora un poliedro regolare  $\alpha$  con simbolo di Schläfli  $\{p, q\}$ . Fissiamo un vertice  $V$  ed enumeriamo i vertici adiacenti come  $V_1, \dots, V_q$ , in modo che, per ogni  $i \in \{1, \dots, q\}$ , i tre punti  $V_i, V$  e  $V_{i+1}$  siano tre vertici consecutivi di una faccia del poliedro. Consideriamo i punti medi  $M_i$  degli spigoli  $VV_i$  che, ricordiamo, sono i vertici della figura al vertice  $F$  in  $V$  contenuta in un certo piano  $\varkappa$ . Visto che la faccia contenente  $M_i, V$  e  $M_{i+1}$  è un poligono regolare con  $p$  lati, concludiamo che l'angolo  $M_iVM_{i+1}$  misura  $\pi - \frac{2\pi}{p}$ . Sia  $\beta$  la piramide con vertice  $V$  e base  $F$  (si veda la figura 12): come abbiamo visto nella sezione precedente, il piede dell'altezza della piramide è il centro  $O$  del poligono regolare  $F$ . Quest'ultimo ha  $q$  lati, quindi un qualsiasi angolo  $M_iOM_{i+1}$  misura  $\frac{2\pi}{q}$ . D'altra parte i due triangoli isosceli  $M_iVM_{i+1}$  e  $M_iOM_{i+1}$  hanno la stessa base, mentre il lato  $OM_i$ , essendo la proiezione sul piano  $\varkappa$  di  $VM_i$ , è più corto di esso.

Pertanto l'angolo  $M_iOM_{i+1}$  è più grande dell'angolo  $M_iVM_{i+1}$ , da cui

$$\pi - \frac{2\pi}{p} < \frac{2\pi}{q},$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Ora, entrambi  $p$  e  $q$  devono essere strettamente maggiori di 2. Se  $p = 3$ , abbiamo solo le possibilità  $q = 3, 4, 5$ . Se  $p = 4$  abbiamo solo le possibilità  $q = 3, 4$  e se  $p = 5$  allora necessariamente  $q = 3$ .  $p$  non può essere maggiore

o uguale a 6 perché altrimenti avremmo  $\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ , ovvero  $q < 3$ . Riassumiamo ora le nostre conclusioni.

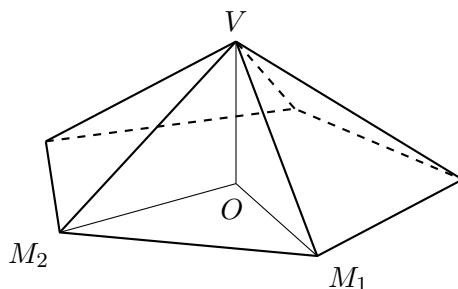


FIGURA 12

**Proposizione 4.1.** *Se  $\alpha$  è un poliedro regolare, allora il suo simbolo di Schläfli è necessariamente contenuto nella seguente lista:*

$$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 3\}. \quad (2)$$

Ci basta ora mostrare che per ciascun elemento  $\{p, q\}$  della lista (2) c'è effettivamente un poliedro regolare con simbolo di Schläfli  $\{p, q\}$  e avremo terminato la nostra classificazione, ovvero avremo raggiunto la classica enumerazione di solidi platonici.

**Teorema 4.2.** *A meno di omettetie e movimenti rigidi ci sono esattamente cinque poliedri regolari, i cui simboli sono elencati in (2).*

**4.1. Il tetraedro  $\{3, 3\}$ .** Poggiamo un triangolo equilatero  $T$  sul piano orizzontale  $\varkappa$  e chiamiamo  $A, B, C$  i suoi vertici e  $O$  il suo centro. Consideriamo ora la retta  $r$  ortogonale a  $\varkappa$  e passante per  $O$  (si veda la figura 13). Senza perdita di generalità possiamo fissare  $O$  come l'origine del nostro sistema di coordinate standard e assumere quindi che  $r$  è l'asse  $z$  del sistema. Prendiamo ora un punto  $P$  su  $r$  che ha terza coordinata non negativa. Notiamo che, comunque si scelga  $P$ , i segmenti  $AP, BP$  e  $CP$  sono tutti congruenti (prendendo, per esempio, i triangoli  $AOP$  e  $COP$ , vediamo facilmente che sono entrambi rettangoli e hanno i cateti congruenti). D'altra parte, quando  $P$  è l'origine il segmento  $AP$  misura meno di  $AB$ , mentre se mandiamo  $P$  all'infinito la misura del segmento  $AP$  cresce e diverge verso l'infinito: in particolare c'è esattamente un punto  $P = V$  per cui tutti i segmenti  $AV, BV, CV, AB, BC$  e  $AC$  sono congruenti. Non c'è in realtà alcun bisogno di scomodare la continuità per trovare  $V$ : con il teorema di Pitagora possiamo facilmente esprimere la lunghezza di  $OV$  in termini di quella di  $AB$ , cosa che lascio per esercizio ai lettori!

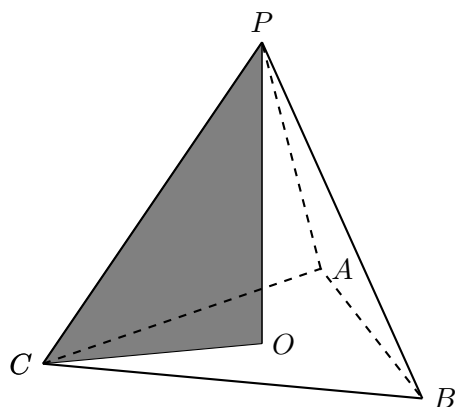


FIGURA 13

È facile verificare che il poliedro appena costruito è regolare. Le facce sono tutte triangoli equilateri per costruzione. Ogni figura al vertice è un triangolo i cui lati sono segmenti che congiungono i punti medi dei lati di triangoli congruenti: ogni figura al vertice è pertanto anch'essa un triangolo equilatero. Non solo abbiamo quindi verificato che il poliedro è regolare, ma anche che il suo simbolo di Schläfli è  $\{3, 3\}$ .

4.2. **Il cubo**  $\{4, 3\}$ . Poggiamo ora un quadrato di vertici  $A, B, C$  e  $D$  sul piano orizzontale  $\alpha$  e trasliamolo lungo l'asse verticale di una quantità pari alla lunghezza di un qualsiasi lato: se  $A', B', C'$  e  $D'$  sono i vertici del quadrato traslato, congiungendo  $A$  con  $A', B$  con  $B', C$  con  $C'$  e  $D$  con  $D'$  otteniamo gli altri 4 spigoli di un cubo. Il solido che abbiamo costruito possiede 6 facce che sono quadrati congruenti. Le figure al vertice sono triangoli con lati uguali, quindi equilateri, ovviamente tutti congruenti (si veda la figura 8). Pertanto il cubo è il poliedro regolare con simbolo di Schläfli  $\{4, 3\}$ .

4.3. **L'ottaedro**  $\{3, 4\}$ . Consideriamo ora lo stesso quadrato  $A, B, C$  e  $D$  di cui sopra e la retta  $r$  passante per il centro del quadrato e ortogonale ad esso. Procedendo come per la costruzione del tetraedro possiamo identificare esattamente due punti  $P$  e  $Q$  su  $r$  con la proprietà che  $PA$  è congruente a  $QA$  e ad  $AB$ : infatti questi punti distano da  $O$  tanto quanto uno dei vertici del quadrato  $ABCD$ . Consideriamo ora l'unione delle due piramidi che hanno il quadrato come base e i punti  $P$  e  $Q$  come vertici (si veda la figura 14).

Il solido corrispondente ha 8 facce che sono triangoli equilateri, tutti congruenti. Per costruzione la figura al vertice in  $P$  e quella in  $Q$  sono entrambe quadrati il cui lato è la metà di  $AB$ . Vogliamo ora mostrare che la stessa proprietà è valida per la figura al vertice in uno qualsiasi tra  $A, B, C$  e  $D$ .

Visto che tramite una rotazione di asse  $r$  è possibile mappare il solido in sé stesso mandando il vertice  $A$  in uno qualsiasi degli altri vertici  $B, C$  e  $D$ , è sufficiente considerare la figura al vertice in  $A$ . Inoltre, grazie

all'Osservazione 3.5 basta mostrare che  $BPDQ$  è un quadrato. D'altra parte i due segmenti  $PQ$  e  $DB$ , che sono le due diagonali di  $BDPQ$ , si tagliano a metà e sono ortogonali, quindi  $BDPQ$  è necessariamente un quadrato. Abbiamo non solo concluso che l'ottaedro costruito è un poliedro regolare, ma anche che il suo simbolo di Schläfli è  $\{3, 4\}$ .

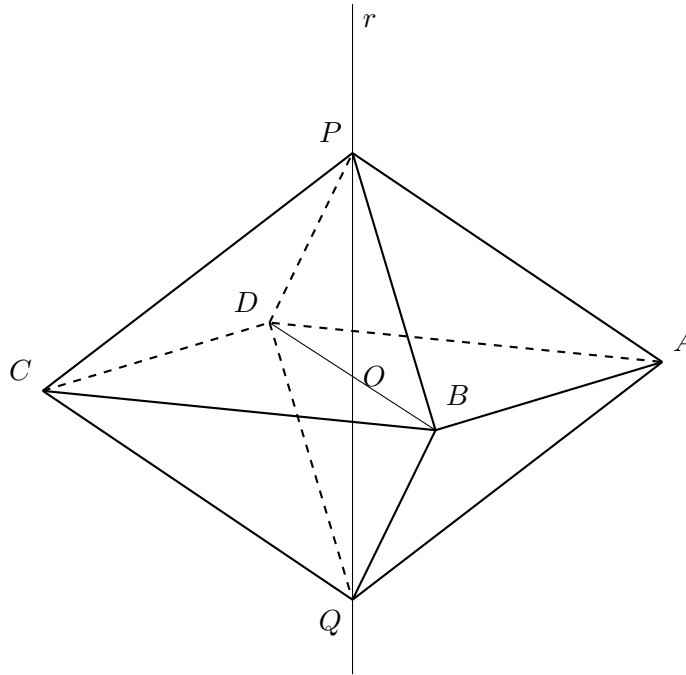


FIGURA 14

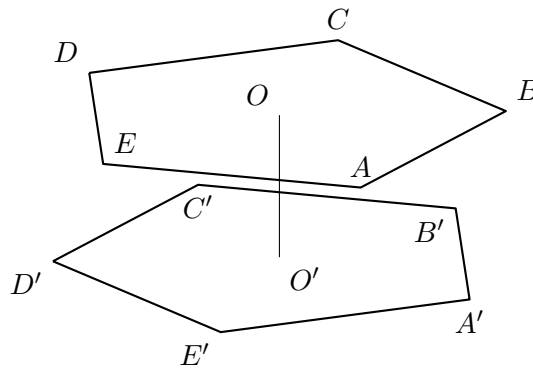


FIGURA 15

4.4. **L'icosaedro  $\{3, 5\}$ .** Consideriamo un pentagono regolare poggiato sul piano orizzontale  $\tau$ . Trasliamolo verticalmente verso il basso e ruotiamolo di

$\frac{\pi}{5}$  attorno all'asse verticale. Chiamiamo  $A, B, C, D$  ed  $E$  i vertici del pentagono e  $A', B', C', D'$  ed  $E'$  quelli del trasformato, in modo che la proiezione di  $A'$  su  $\tau$  si trovi tra  $A$  e  $B$  (si veda la figura 15).

Congiungiamo i vertici  $A$  e  $A'$ ,  $A'$  e  $B$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $B'$  e  $C$  e così via, formando un solido  $\alpha$ . Tutti questi nuovi segmenti sono congruenti e, se la traslazione è molto piccola,  $|A - A'| < |A - B|$  mentre se la traslazione è molta grande,  $|A - A'| > |A - B|$ . C'è quindi una traslazione per la quale tutti gli spigoli di  $\alpha$  sono congruenti (si veda la figura 16). In realtà, nel seguito ci farà comodo sapere la distanza  $OO'$  e scopriremo che coincide con il raggio del cerchio circoscritto al pentagono.

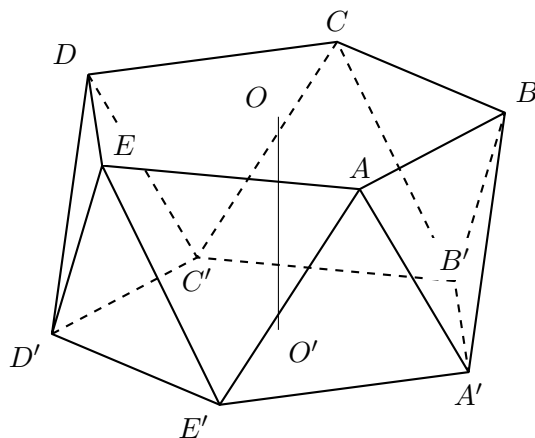


FIGURA 16

Aggiungiamo ora una piramide retta sopra  $\alpha$  e una sotto  $\alpha$ , in modo che i piedi delle rispettive altezze siano i centri dei pentagoni (si vedano le figure 17 e 18). Di nuovo è facile vedere che le altezze delle piramidi possono essere scelte in modo che gli spigoli del nuovo solido siano tutti congruenti: infatti basta scegliere, ad esempio, il vertice  $V$  della piramide superiore (si veda la figura 17) in modo che il segmento  $VA$  sia congruente con il segmento  $AB$ . Per applicare lo stesso argomento di continuità che abbiamo usato nel caso del tetraedro, la condizione necessaria è che il raggio del cerchio circoscritto al pentagono sia minore del lato del pentagono. Ma quest'ultima proprietà è ovvia, se si pensa che l'identità tra la lunghezza del raggio e il lato del poligono regolare è raggiunta dall'esagono che, avendo un lato in più, a parità di raggio del cerchio circoscritto, ha il lato più corto di quello del pentagono. In ogni caso, in seguito determineremo l'altezza delle piramidi cercate.

Il solido in questione, ovvero quello ottenuto aggiungendo ad  $\alpha$  le due piramidi (si veda di nuovo la figura 18), ha 20 facce (le 10 facce laterali di  $\alpha$  più le 5 della piramide superiore, più le 5 della piramide inferiore).

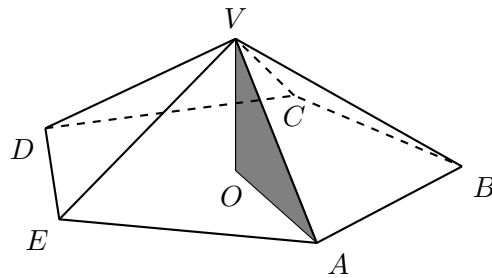


FIGURA 17. La piramide superiore.

Tutte le facce sono triangoli equilateri. Se  $V$  è il vertice della piramide superiore, è ovvio che la figura al vertice in  $V$  è un pentagono regolare di lato metà del lato del pentagono  $ABCDE$ . Analogamente per il vertice  $V'$  della piramide inferiore. Vogliamo ora verificare che anche le altre figure al vertice sono pentagoni regolari. La figura costruita ha ovvie simmetrie: con una rotazione di asse  $VV'$  si può mappare la figura in sé portando uno qualsiasi dei punti  $B, C, D, E$  in  $A$ , o uno qualsiasi dei punti  $B', C', D', E'$  in  $A'$ . D'altra parte, se effettuiamo prima una riflessione rispetto al piano orizzontale passante per il punto medio di  $OO'$  e poi una rotazione di asse  $VV'$  e angolo  $\frac{\pi}{5}$ , possiamo mappare il poliedro in sé mandando  $A$  in  $A'$ . Quindi ci basta verificare che la figura al vertice in  $A$  esiste ed è un pentagono regolare.

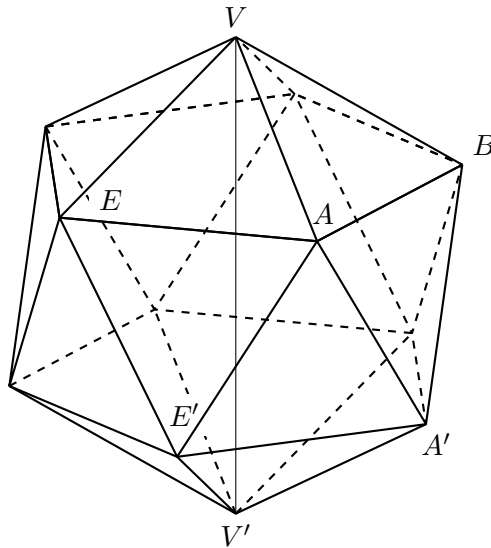


FIGURA 18. Il solido formato da  $\alpha$  e dalle due piramidi.

La chiave di volta è il seguente lemma (che ovviamente sarebbe una conseguenza del Lemma 3.9 se sapessimo già che il poliedro costruito è regolare).

**Lemma 4.3.** *I vertici del poliedro appena costruito giacciono tutti su una singola sfera il cui centro è il punto medio  $M$  del segmento  $OO'$ . Inoltre, se il raggio del cerchio circoscritto al pentagono  $ABCDE$  è 1, allora  $|O-O'| = 1$ , il raggio della sfera circoscritta è  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , le altezze delle piramidi inferiore e superiore misurano  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  e lo spigolo dell'icosaedro misura  $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ .*

Dato il lemma, possiamo concludere facilmente quello che desideriamo. Grazie all'Osservazione 3.5, per mostrare che la figura al vertice esiste ed è un pentagono regolare basta mostrare che i vertici  $V, B, A', E', E$  sono complanari e formano un pentagono regolare (si veda la figura 18). Ora, visto che tali punti sono equidistanti da  $A$ , giacciono su una sfera di centro  $A$ . D'altra parte, il Lemma 4.3 ci dice che giacciono anche su una sfera di centro  $O$ . Quindi i punti in questione si trovano sull'intersezione delle due sfere, che ovviamente è un cerchio: ne concludiamo che sono complanari. Ma sappiamo anche che i segmenti  $EV, VB, BA', A'E'$  ed  $E'E$  sono, per costruzione, congruenti: quindi il Corollario 2.5 implica che  $EVBA'E'$  è un pentagono regolare. Chiaramente la conclusione delle nostre considerazioni è che il poliedro appena costruito è regolare e che il suo simbolo di Schläfli è  $\{3, 5\}$ : abbiamo trovato l'icosaedro.

Per completare il nostro argomento, non ci resta che dimostrare il Lemma 4.3

*Dimostrazione del Lemma 4.3.* I vertici  $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$  sono, per costruzione, tutti equidistanti da  $M$ . Anche  $VM$  e  $V'M$  sono congruenti: dobbiamo quindi mostrare che  $VM$  e  $AM$  sono congruenti. Senza perdita di generalità possiamo supporre che la lunghezza  $|A-O|$  di  $AO$  sia 1. Calcoliamo innanzitutto la lunghezza di  $OV$ . Ricordiamo che la lunghezza dei lati dei due pentagoni è  $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$  (per questo ed altri fatti utili sul pentagono regolare, rimandiamo al Teorema A.1).

Usando il Teorema di Pitagora sul triangolo  $AOV$  (si veda la figura 17) con semplici calcoli algebrici otteniamo

$$|V-O| = \sqrt{|A-V|^2 - |A-O|^2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Consideriamo ora la proiezione  $A''$  di  $A'$  sul piano di  $ABCDE$ . Tracciamo il segmento  $OA''$  e chiamiamo  $H$  la sua intersezione con il segmento  $AB$ , che è il punto medio di quest'ultimo (si veda la figura 19). La lunghezza di  $OH$  è l'apotema del pentagono, ovvero  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$  (si veda di nuovo il Teorema A.1). Usando ancora il teorema di Pitagora sui triangoli  $A'A''H$  e  $AHA'$  (si veda



la figura 19) otteniamo

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} = |A - A'|^2 = |A'' - A'|^2 + |A'' - H|^2 + |H - A|^2 \quad (3)$$

$$= |O - O'|^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{5 - \sqrt{5}}{8}. \quad (4)$$

Dall'ultima identità e da semplici calcoli deduciamo che la distanza tra  $O$  e  $O'$  è 1. Quindi la lunghezza di  $OM$  è  $\frac{1}{2}$ .

La lunghezza di  $MV$  è allora  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ . D'altra parte la lunghezza di  $MA$  è, per il Teorema di Pitagora:

$$\sqrt{|O - A|^2 + |O - M|^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$A$  e  $V$  sono allora equidistanti da  $M$ . □

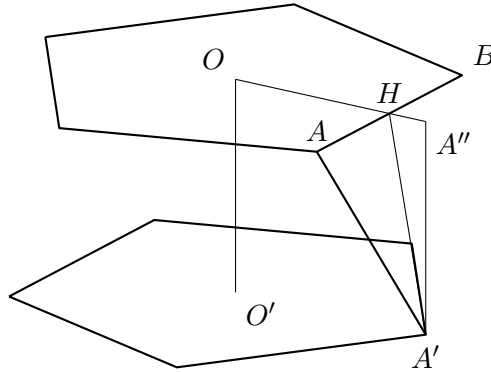


FIGURA 19. Il Teorema di Pitagora sul triangolo  $A'A''H$  dà  $|H - A'|^2 = |H - A''|^2 + |A'' - A'|^2 = |H - A''|^2 + |O - O'|^2$ . Dal Teorema di Pitagora per il triangolo  $A'HA$  deduciamo poi (3).

Notiamo un corollario del lemma che ci sarà utile in seguito.

**Corollario 4.4.** *Il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro è più corto degli spigoli.*

*Dimostrazione.* La disuguaglianza si riduce a

$$\frac{5}{4} < \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

ovvero  $\frac{5}{4} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ , che è equivalente a  $\sqrt{5} > 2$ . □

5. LA DUALITÀ E IL DODECAEDRO  $\{5, 3\}$ 

Per completare la dimostrazione del Teorema 4.2 dobbiamo ancora mostrare che esiste un poliedro regolare con simbolo  $\{5, 3\}$ . In questa sezione ci dedicheremo allora alla seguente proposizione.

**Proposizione 5.1.** *I centri delle facce di un icosaedro sono i vertici di un poliedro regolare con simbolo  $\{5, 3\}$ .*

Prima di addentrarci nella dimostrazione della proposizione faremo alcune importanti considerazioni. Innanzitutto notiamo che non è ovvia neanche l'esistenza di un poliedro convesso che abbia tali vertici, perché dati dei punti a caso nello spazio, non è in generale vero che questi sono i vertici di un poliedro convesso. Prendiamo ad esempio i quattro vertici di un tetraedro e un punto ad esso interno. Allora non esiste alcun insieme convesso di cui questi punti siano i punti estremali. In realtà un teorema generale dell'analisi convessa (si veda, per esempio, [Brø83]), ci garantisce che, dato un qualsiasi poliedro convesso  $P$ , i (bari)centri delle sue facce sono i vertici di un altro poliedro convesso  $P'$ , che viene chiamato *duale di  $P$* . Non ci avvarremo di questo fatto (che tra l'altro è ancora più generale, visto che si può definire il duale di qualsiasi convesso e non solo dei poliedri), ma daremo invece una dimostrazione specifica nel caso che ci interessa. Tuttavia non posso tacere il fatto che la Proposizione 5.1 è solo la punta di un grosso iceberg.

Infatti la dualità ha molte altre proprietà interessanti. Innanzitutto è una *involuzione* nella categoria degli insiemi convessi: il duale del duale di  $P$  è omotetico a  $P$ . Per questo molti testi ed autori danno una definizione leggermente diversa del convesso duale, che ci toglie la fastidiosa omotetia della frase precedente: con un'opportuna "normalizzazione" si può definire il convesso duale in modo che il duale del duale di  $P$  coincida con  $P$ .

Un secondo fatto notevole è che il duale di un poliedro regolare è sempre un poliedro regolare. A questo proposito la Proposizione 5.1 è la parte più difficile dell'affermazione: invitiamo il lettore a cercare da solo una dimostrazione che il duale di un tetraedro è ancora un tetraedro, il duale di un cubo è un ottaedro e il duale di un ottaedro è un cubo. In particolare, in termini di simboli di Schläfli, il duale di un poliedro regolare con simbolo  $\{p, q\}$  è un poliedro regolare con simbolo  $\{q, p\}$ . Per chi volesse approfondire, una referenza fondamentale per l'analisi convessa è [Roc70]; si tratta però di un testo piuttosto astratto e generale, che in particolare tratta anche gli aspetti infinito-dimensionali della teoria. Un testo molto più adatto agli scopi di questa nota è [vT84]. Infine, il testo [Brø83] è completamente incentrato sui politopi convessi e anche se lo scopo dell'autore è arrivare a temi di ricerca moderni, i primi due capitoli trattano gli argomenti più elementari di analisi convessa che sono rilevanti nella teoria.

*Dimostrazione della Proposizione 5.1.* Dal Lemma 3.9 sappiamo che i centri delle facce di un icosaedro sono tutti su una stessa sfera centrata nel centro

dell'icosaedro, che, per essere consistente con la notazione della sezione precedente, chiameremo  $M$ . Questo fatto da solo, insieme con un po' di analisi convessa, giustifica l'esistenza di un poliedro convesso che ha tali punti come vertici. Ne daremo tuttavia una dimostrazione alternativa, da cui trarremo più informazioni. Consideriamo infatti un vertice  $V$  dell'icosaedro e chiamiamo  $A'', B'', C'', D'', E''$  i centri delle 5 facce dell'icosaedro che hanno  $V$  come vertice. Avvalendoci del Lemma 3.8 possiamo supporre, senza perdita di generalità che, riferendoci alla costruzione dell'icosaedro data nella sezione precedente,  $V$  è il vertice della piramide superiore, si veda la figura 20.

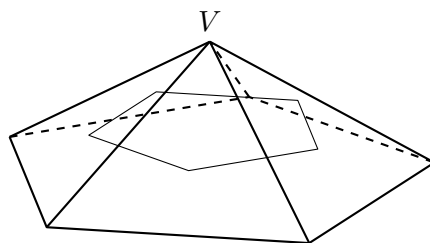


FIGURA 20. I centri di cinque facce dell'icosaedro aventi un vertice  $V$  in comune formano un pentagono regolare.

Se effettuiamo una rotazione che ha come asse la retta passante per  $V$  e per il centro  $M$  dell'icosaedro e come angolo  $\frac{2\pi}{5}$ , i vertici della piramide superiore dell'icosaedro vengono permutati in modo che ciascun vertice viene mappato in quello che si trova immediatamente alla sua destra. In particolare le facce dell'icosaedro che hanno  $V$  come vertice vengono permutate nello stesso modo e ne concludiamo che lo stesso avviene per i punti  $A'', B'', C'', D''$  ed  $E''$ . In particolare questi punti sono contenuti in un unico piano perpendicolare all'asse di rotazione e infatti sono contenuti in un unico cerchio di questo piano, avente come centro l'intersezione del piano con l'asse di rotazione. Un'ulteriore conseguenza dell'invarianza per questo movimento rigido è che  $A'', B'', C'', D''$  ed  $E''$  sono i vertici di un pentagono regolare (si veda di nuovo la figura 20).

Consideriamo ora, per ognuno dei 12 vertici  $V, A, \dots$  dell'icosaedro, i corrispondenti piani  $\pi_V, \pi_A, \dots$  su cui si trovano i punti di cui sopra. Ogni piano, fissiamo ad esempio  $\pi_V$ , delimita un unico semispazio chiuso che contiene tutti i centri delle facce dell'icosaedro e che denoteremo con  $\pi_V^+$ . L'intersezione di tutti questi semispazi è un convesso  $\Omega$ , che è anche limitato. Questo convesso contiene sicuramente tutti i centri delle facce dell'icosaedro. Fissato uno qualsiasi di questi centri (che chiameremo  $P$ ), chiamiamo  $F$  la faccia dell'icosaedro di cui è centro,  $A_1, A_2, A_3$  i suoi vertici e  $\pi_{A_1}, \pi_{A_2}$  e  $\pi_{A_3}$  i corrispondenti piani. Allora  $P$  è proprio l'intersezione dei tre piani. Ora, se  $\sigma$  fosse un segmento contenuto in  $\Omega$  di cui  $P$  non è un estremo, allora questo segmento dovrebbe essere contenuto anche in ogni  $\pi_{A_i}^+$ . Ma un segmento di

$\pi_{A_i}^+$  che contiene  $P$  e di cui  $P$  non è un estremo deve essere contenuto in  $\pi_{A_i}$ . Quindi  $\pi_{A_i}$  sarebbe un sottoinsieme di  $\pi_{A_1} \cap \pi_{A_2} \cap \pi_{A_3}$ , che d'altra parte è l'insieme  $\{P\}$ : abbiamo ottenuto un assurdo. Ne concludiamo che tale segmento  $\sigma$  non esiste e quindi che  $P$  è un punto estremale di  $\Omega$ . D'altra parte, ogni altro punto estremale di  $\Omega$  è necessariamente contenuto in uno dei piani, per fissare le idee diciamo  $\pi_V$ .

Vogliamo ora mostrare che  $\Omega$  non ha altri punti estremali. Fissiamo infatti un punto estremale  $Q$ . Allora questo punto deve trovarsi sulla frontiera di  $\Omega$  e quindi necessariamente sulla frontiera di uno dei semispazi, per fissare le idee diciamo  $\pi_V$ . Consideriamo di nuovo i centri  $A'', B'', C'', D'', E''$  delle facce dell'icosaedro che hanno  $V$  come vertice. Sappiamo che questi centri sono i vertici di un pentagono regolare  $G$  su  $\pi_V$ . Consideriamo due vertici consecutivi, diciamo  $A''$  e  $B''$ . Questi due punti sono i centri di due facce che hanno uno spigolo  $\sigma$  in comune. Lo spigolo  $\sigma$  ha  $V$  come estremo: chiamiamo  $V_1$  l'altro (si veda la figura 21). Allora chiaramente sia  $A''$  che  $B''$  si trovano anche sul piano  $\pi_{V_1}$ .  $\pi_{V_1} \cap \pi_V$  è allora la retta  $s$  che contiene il lato  $A''B''$  del pentagono  $G$ .  $s$  delimita due semipiani su  $\pi_V$ , uno dei quali contiene il pentagono  $G$ . Visto che gli altri vertici del pentagono sono contenuti in  $\Omega$ , concludiamo che  $\Omega \cap \pi_V$  deve essere contenuto proprio nel semipiano  $\tau$ . Visto che l'argomento può essere ripetuto per ogni coppia di vertici consecutivi del pentagono, ne concludiamo che  $\Omega \cap \pi_V \subset G$ . Ma allora il punto estremale  $Q$  è contenuto in  $G$ .

D'altra parte ogni lato di  $G$  appartiene a  $\Omega$ , perché è un segmento che ha due estremi in  $\Omega$ . Quindi, visto che ogni punto in  $G$  può essere incluso in un segmento che ha estremi in due lati di  $G$ , ne concludiamo che ogni punto di  $G$  appartiene a  $\Omega$ . In conclusione  $G = \Omega \cap \pi_V$ . Ma allora, il punto estremale  $Q$  di  $\Omega$  che abbiamo fissato deve essere uno dei punti estremali di  $G$ , ovvero uno dei cinque centri  $A'', B'', C'', D'', E''$ .

Il piú è fatto. Infatti l'argomento appena dato mostra anche che

- i vertici di  $\Omega$  sono proprio i centri delle facce dell'icosaedro;
- una faccia di  $\Omega$  è necessariamente contenuta in uno dei 12 piani  $\pi_V, \pi_A, \dots$ ;
- ciascuna intersezione di uno dei 12 piani con  $\Omega$  è contenuta nella sua frontiera ed è pertanto una faccia;
- le facce di  $\Omega$  sono, allora, 12 pentagoni regolari.

Fissiamo ora un vertice  $A''$  di  $\Omega$ , che è quindi anche il centro di una faccia  $F$  dell'icosaedro. I segmenti del solido che hanno  $A''$  come estremo hanno l'altro estremo nel centro di un'altra faccia dell'icosaedro che ha un lato in comune con  $F$ . Visto che  $F$  ha tre lati, questo vuol dire che ci sono giusto tre spigoli di  $\Omega$  che hanno  $A''$  come estremo (si veda di nuovo la figura 21). Consideriamo allora la figura al vertice in  $A''$ : per costruzione è un triangolo con i lati uguali, ovvero un triangolo equilatero.  $\Omega$  è allora un poliedro regolare che ha facce pentagonali e figure al vertice triangolari: in particolare il suo simbolo di Schläfli è  $\{5, 3\}$ .  $\square$

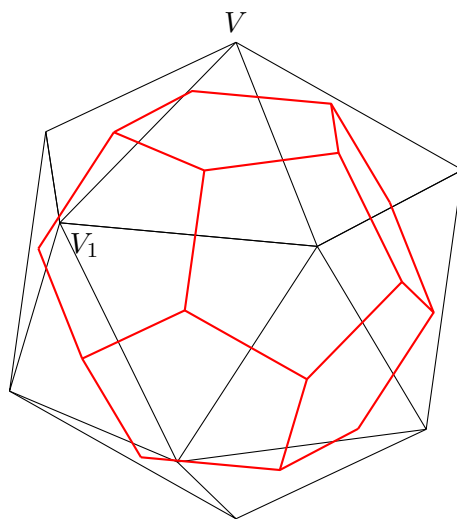


FIGURA 21. Congiungendo i centri delle facce dell'icosaedro otteniamo un poliedro con 12 facce pentagonali tutte congruenti (che infatti è il dodecaedro  $\{5, 3\}$ ).

## 6. QUATTRO DIMENSIONI E OLTRE

Nel resto della nota ci occuperemo dei politopi regolari in ogni dimensione ed è quindi ora di “tuffarci fuori” dal nostro spazio tridimensionale. Fissiamo allora un numero naturale  $n \geq 4$ . Lo spazio euclideo di dimensione  $n$  sarà per noi lo spazio delle  $n$ -uple di numeri reali  $(v_1, \dots, v_n)$ , che chiameremo vettori  $n$ -dimensionali. In pratica stiamo immaginando di aggiungere coordinate alle tre che abbiamo già nello spazio usuale. In particolare in quattro dimensioni abbiamo una quarta coordinata, ovvero un quarto asse cartesiano ortogonale ai soliti tre assi dello spazio. Come nelle sezioni precedenti, useremo la stessa notazione per un punto  $P$  dello spazio e per il vettore che lo identifica nel sistema di coordinate che abbiamo stabilito. I testi già citati ([Cox89] e [AC09]) sono un ottimo punto di partenza per comprendere la geometria degli spazi euclidei di dimensione più alta e per quegli aspetti dell'algebra lineare intimamente collegati ad essa.

**6.1. Spazi negli spazi.** Nel nostro spazio  $n$ -dimensionale “vivono” già tutti gli oggetti tridimensionali, bidimensionali e unidimensionali che conosciamo. La retta  $r$  generata da due punti distinti  $P$  e  $Q$  è in particolare l'insieme dei punti  $r = \{P + \lambda(Q - P) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ : per due punti distinti passa allora una sola retta. Dato un terzo punto  $R$  che non si trova sulla retta avremo il piano  $\pi$  che contiene  $P$ ,  $Q$  e  $R$ :  $\pi = \{P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . Ovviamente un piano può anche essere determinato da due rette con un punto in comune. Analogamente, per quattro punti non complanari passa un solo piano tridimensionale. Un piano tridimensionale può anche essere identificato da tre rette non complanari passanti per un punto, o da un piano

e una retta che hanno un punto in comune, o da una coppia di piani che hanno una retta in comune.

Via via che aumentiamo le dimensioni possiamo considerare gli spazi di dimensione più bassa come pezzi degli spazi di dimensione più alta. Pertanto nello spazio a cinque dimensioni un sottospazio quadridimensionale può essere identificato da uno spazio tridimensionale e una retta che hanno un solo punto in comune, o da due piani bidimensionali che hanno un solo punto in comune, da quattro rette generiche passanti per un punto o da cinque punti che non siano già contenuti in uno spazio tridimensionale. Una regola generale è che l'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio, a meno che non sia vuota (si noti che seguiremo la convenzione che un singolo punto forma uno spazio 0-dimensionale!). I sottospazi che hanno una dimensione in meno dello spazio ambiente verranno chiamati *iperspazi*.

In generale ci avvarremo di questi pezzi più piccoli del nostro spazio “ambiente” più grande per ottenere un'idea intuitiva di ciò che stiamo trattando. Ad esempio, possiamo affettare ogni oggetto dello spazio quadridimensionali con una famiglia di iperpiani tridimensionali paralleli. Quindi un oggetto quadridimensionale può essere pensato come una collezione di fette tridimensionali, così come possiamo pensare un oggetto tridimensionale come una collezione di fette bidimensionali. Ovviamente per rendere le considerazioni completamente rigorose il lettore esperto può sempre ricorrere all'algebra lineare.

**6.2. Distanze e ortogonalità.** La distanza tra due punti  $P$  e  $Q$  è definita come il modulo del vettore  $P - Q$  e a sua volta il modulo di un vettore è la radice quadrata della somma dei quadrati delle coordinate. L'ortogonalità può essere definita attraverso il prodotto scalare. Supponiamo che  $A$ ,  $B$  e  $C$  siano tre punti che non giacciono su una stessa retta: allora la misura dell'angolo formato tra il segmento  $AB$  e il segmento  $BC$  è l'arcocoseno di  $\frac{(B-A) \cdot (C-A)}{|B-A||C-A|}$ . Questa definizione è compatibile anche con l'intuizione geometrica: se “estraiamo” dal nostro spazio il piano  $\pi$  su cui si trovano  $A$ ,  $B$  e  $C$ , l'angolo in  $A$  ha la “misura corretta”. In particolare se  $(B - A) \cdot (C - A) = 0$  allora l'angolo è retto. Con le definizioni appena date tutte le regole della trigonometria che conosciamo sono valide in ogni dimensione.

Di due sottospazi  $V$  e  $W$  di un dato spazio che hanno un solo punto  $P$  in comune diremo che sono ortogonali se  $Q - P$  è ortogonale a  $R - P$  per ogni coppia di punti  $Q \in V$  e  $R \in W$ . Più in generale, se l'intersezione di  $V$  e  $W$  è data dal sottospazio  $Z$ , diremo che  $V$  e  $W$  sono ortogonali se: per ogni punto  $P \in Z$  e per ogni coppia  $Q \in V$  e  $R \in W$  tale che  $Q - P$  e  $R - P$  siano entrambi ortogonali a  $Z$  abbiamo che  $Q - P$  e  $R - P$  sono ortogonali tra loro.

Dato un sottospazio  $V$  e un punto  $P$  fuori da esso c'è sempre un'unica retta passante per  $P$  che è ortogonale a  $V$ : se  $Q$  è il punto in cui tale retta incontra  $V$ , allora chiameremo il numero  $|P - Q|$  *distanza tra  $P$  e  $V$* . Inoltre la mappa che associa  $Q$  a  $P$  è la *proiezione ortogonale* sul sottospazio  $V$ .

**6.3. Omotetie, movimenti rigidi e congruenze.** L'omotetia di centro  $O$  e fattore  $\lambda \in \mathbb{R}$  è la mappa che manda ogni punto  $P$  nel punto  $P'$  tale che  $P' - O = \lambda(P - O)$ .

Un movimento rigido dello spazio  $n$ -dimensionale (detto anche isometria) è una mappa dello spazio in sé che preserva la distanza di ogni coppia di punti. Una semplice sottoclasse sono le traslazioni, ovvero quelle mappe che spostano ogni punto  $P$  di un vettore fissato  $V$ : per una tale traslazione  $T$  abbiamo allora la regola  $T(P) = P + V$ . Più interessanti sono le isometrie che fissano un qualche punto  $O$ . Se prendiamo  $O$  come origine delle coordinate si può mostrare che queste sono necessariamente delle trasformazioni lineari di un tipo particolare (dette *ortogonali*). Una sottoclasse ancora più particolare (e piccola) è data dalle riflessioni rispetto agli iperspazi  $V$ : dato  $P$  tracciamo la retta passante per  $P$  e perpendicolare a  $V$  e mappiamo  $P$  nell'unico altro punto  $P'$  di  $r$  che ha la stessa distanza di  $P$  da  $V$ .

Consideriamo ora una retta  $r$  e la collezione di iperpiani  $\varkappa$  ortogonali a  $r$ . Fissiamone uno qualsiasi tra essi, che chiameremo  $\varkappa_0$ , e la cui intersezione con  $r$  verrà chiamata  $O$ . Supponiamo che  $T$  sia un movimento rigido di  $\varkappa_0$  che tiene fisso  $O$ . Allora possiamo costruire un movimento rigido  $T'$  dello spazio ambiente con il seguente procedimento. Per ogni punto  $P$  consideriamo l'unico punto  $Q \in r$  tale che  $P - Q$  sia ortogonale a  $r$ : allora  $O + (P - Q)$  appartiene a  $\varkappa_0$  e poniamo  $T'(P) = Q - O + T(O + P - Q)$ . Notiamo che  $T'$  fissa l'asse  $r$ , ovvero ogni punto di  $r$  viene mappato in sé stesso. Nello spazio tridimensionale una tale trasformazione che non sia l'identità o è una riflessione rispetto a un piano che contiene  $r$  o è una rotazione di asse  $r$ .

In modo analogo si possono costruire isometrie rimpiazzando  $r$  con sottospazi di dimensione maggiore. Se una isometria fissa almeno un punto, allora chiameremo asse della isometria il sottospazio di dimensione massima che viene fissato da essa (nel senso che ogni elemento del sottospazio viene mappato in sé). L'esistenza e unicità di tale sottospazio è un teorema dell'algebra lineare. Inoltre il teorema ci garantisce anche che l'isometria è costruita come nel paragrafo sopra, ovvero che essa mappa sottospazi ortogonali all'asse in sé e la sua azione può essere compresa guardando cosa fa su uno qualsiasi di questi sottospazi di dimensione più bassa. Se l'asse è  $n - 1$ -dimensionale allora l'isometria è necessariamente una riflessione. Se l'asse è  $n - 2$ -dimensionale allora l'isometria è costruita ruotando tutti gli spazi bidimensionali ortogonali all'asse di uno stesso angolo  $\vartheta$ : queste particolari isometrie verranno chiamate rotazioni bidimensionali. Un teorema importante ci garantisce che ogni isometria può essere ottenuta componendo un numero finito di traslazioni, riflessioni e rotazioni bidimensionali, ma non ne faremo uso in queste note.

Infine, due regioni dello spazio  $n$ -dimensionale verranno dette congruenti se esiste un movimento rigido che porta una sull'altra.

## 7. POLITOPI REGOLARI E SIMBOLI DI SCHLÄFLI

**7.1. Politopi.** Analogamente alla Sezione 3.1 possiamo definire le regioni convesse di uno spazio  $n$ -dimensionale come quelle regioni che contengono il segmento congiungente ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  appartenenti ad esse. I punti estremali di una regione convessa sono, come nelle dimensioni piú basse, quei punti che non sono contenuti in nessun segmento appartenente alla regione.

Un insieme convesso chiuso che giocherà un ruolo fondamentale in parecchie considerazioni a venire è la *palla* (che forse faremo meglio a chiamare iperpalla): la palla chiusa di centro  $O$  e raggio  $r > 0$  è l'insieme dei punti che distano al piú  $r$  da  $O$ . Per inciso, un punto si dice interno a una regione se la regione contiene una palla centrata in quel punto. In particolare i punti di frontiera della regione sono quei punti che non sono interni né ad essa né all'insieme complementare. La frontiera di una palla di raggio  $r$  è allora data dai punti che distano *esattamente*  $r$  dal suo centro. In analogia con il caso tridimensionale la frontiera della palla viene chiamata *ipersfera*. Un iperpiano che tocca una ipersfera in un unico punto viene detto tangente. Con il Teorema di Pitagora possiamo facilmente verificare l'analogo multidimensionale della usuale condizione di tangenza: un iperpiano  $\varkappa$  che interseca l'ipersfera  $\gamma$  in un punto  $P$  è tangente ad essa se e solo la retta passante per  $p$  e per il centro di  $\gamma$  è perpendicolare a  $\varkappa$ .

**Definizione 7.1.** *Un politopo convesso è una regione chiusa e convessa dello spazio  $n$ -dimensionale che ha un numero finito di punti estremali e almeno un punto interno.*

In uno spazio  $n$ -dimensionale useremo il termine *politopo  $k$ -dimensionale* per quelle sottoregioni di sottospazi  $k$ -dimensionali che soddisfano la definizione sopra se identifichiamo i rispettivi sottospazi che le contengono con lo spazio euclideo  $k$ -dimensionale.

La frontiera di un politopo  $n$ -dimensionale  $\Omega$  può essere suddivisa in “facce di dimensioni  $0, 1, \dots, n - 1$ ”:

- le facce di dimensione 0, dette anche *vertici*, sono i punti estremali;
- le facce di dimensione  $n - 1$ , dette anche *celle*, sono quei politopi  $n - 1$ -dimensionali che risultano dall'intersezione di alcuni iperpiani con  $\Omega$  e che sono interamente contenuti nella frontiera di  $\Omega$ ;
- le facce di dimensione  $n - 2$  sono le celle delle celle;
- e cosí via per induzione sulla dimensione fino ad arrivare alle facce di dimensione 1, che vengono anche dette *spigoli*.

Notiamo che, come succede per i poliedri, la chiusura della classe degli insiemi convessi per intersezione ci garantisce che le celle dei politopi sono anch'esse politopi convessi, ed è questo che ci permette di procedere per induzione nella definizione delle facce di dimensione piú bassa. Inoltre, i vertici di una qualsiasi faccia sono anche vertici del politopo originale.

**7.2. Politopi regolari.** Procediamo con la nostra analogia.



**Definizione 7.2.** Dato un politopo  $n$ -dimensionale  $\Omega$  convesso e un suo vertice  $V$ , consideriamo i punti medi  $M_1, \dots, M_q$  degli spigoli di  $\Omega$  che hanno  $V$  come estremo. Se questi vertici giacciono su uno stesso sottospazio  $n-1$ -dimensionale  $\varkappa$ , la convessità di  $\Omega$  garantisce che l'intersezione di  $\Omega$  con  $\varkappa$  è un politopo convesso di dimensione  $n-1$  che ha i punti  $M_1, \dots, M_q$  come vertici. Questo politopo, quando esiste, verrà chiamata figura al vertice di  $\Omega$  in  $V$ .

**Definizione 7.3.** Un politopo  $n$ -dimensionale convesso si dice regolare se

- (i) le sue celle sono politopi  $n-1$ -dimensionali regolari congruenti;
- (ii) per ogni suo vertice esiste la corrispondente figura al vertice e tutte le figure al vertice sono politopi  $n-1$ -dimensionali regolari congruenti.

Continuando con la nostra analogia possiamo dare una formulazione  $n$ -dimensionale dell'Osservazione 3.5, che per comodità riassumiamo nel seguente lemma, la cui dimostrazione è un'ovvia trasposizione dell'argomento dell'Osservazione 3.5. Come nel caso tridimensionale chiameremo adiacenti quei vertici che sono i punti estremi di uno spigolo.

**Lemma 7.4.** La figura al vertice  $F$  di un politopo  $\Omega$  in un suo vertice  $V$  esiste se e solo se i vertici adiacenti a  $V$  giacciono su un iperpiano. Inoltre, in tal caso  $F$  è omotetica al politopo che si ottiene intersecando  $\Omega$  con l'iperpiano che contiene i vertici adiacenti a  $V$ , attraverso un'omotetia di centro  $V$  e fattore 2.

Consideriamo ora il caso quadridimensionale. Dato un politopo quadridimensionale  $\Omega$  le sue celle saranno dei poliedri con simbolo di Schläfli  $\{p, q\}$ , mentre le sue figure al vertice saranno poliedri con figure al vertice  $\{q', r\}$ . Fissiamo una cella  $C$  con vertice  $V$  e la figura al vertice  $F$  di  $\Omega$  in  $V$ . La figura al vertice  $F'$  del poliedro  $C$  nel vertice  $V$  è un poligono regolare  $P$  con  $q$  lati. Ora, i vertici  $M_1, \dots, M_q$  di questa figura  $P$  sono punti medi di spigoli della cella  $C$ , che a loro volta sono però anche spigoli di  $\Omega$ . Pertanto il poligono  $P$  è contenuto nella figura al vertice  $F$ . D'altra parte  $F$  è l'intersezione di  $\Omega$  con un sottospazio 3-dimensionale  $\varkappa$  e quindi la sua frontiera è data dall'intersezione della frontiera di  $\Omega$  con  $\varkappa$ . Ne segue che il poligono  $P$  è contenuto nella frontiera di  $F$ . I vertici di  $P$  sono anch'essi vertici di  $F$ : in particolare i lati di  $P$  sono spigoli di  $F$  e  $P$  è una faccia di  $F$ . Pertanto  $q = q'$ . Possiamo quindi "aggregare" i simboli  $\{q', r\}$  e  $\{p, q\}$  in un unico simbolo di Schläfli  $\{p, q, r\}$  per i politopi quadridimensionali.

La considerazione di sopra si generalizza a tutti gli spazi aumentando la dimensione di 1 di volta in volta. In particolare possiamo dimostrare induttivamente il seguente teorema.

**Teorema 7.5.** Sia  $\Omega$  un politopo regolare  $n$ -dimensionale,  $V$  un suo vertice,  $C$  una cella che contiene  $V$  e  $F$  la figura al vertice in  $V$ . Allora ogni cella di  $F$  è una figura al vertice di  $C$ .

**7.3. Simboli di Schläfli.** Tramite il teorema possiamo definire induttivamente i simboli di Schläfli per i politopi regolari  $n$ -dimensionali: si tratta di una collezione *ordinata* di  $n - 1$  interi  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  con la proprietà che  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$  è il simbolo di Schläfli delle celle e  $\{p_2, \dots, p_{n-1}\}$  il simbolo di Schläfli delle figure al vertice. Ovviamente spezzando a loro volta le celle e le figure al vertice nelle rispettive celle e figure al vertice otterremo politopi  $n - 2$ -dimensionali. Procedendo con questa decomposizione arriviamo a una collezione di poliedri regolari con simboli  $\{p_1, p_2\}, \{p_2, p_3\}, \dots, \{p_{n-1}, p_{n-2}\}$ : gli interi in questione possono allora essere solo 3, 4 o 5.

Torniamo ora alla dimensione 4 e fissiamo un politopo quadridimensionale regolare. Sia  $\{p, q, r\}$  il suo simbolo di Schläfli: visto che ciascun numero è compreso tra 3 e 5 le possibili terne sono al più 27. D'altra parte è abbastanza ovvio che  $\{3, 4, 5\}$  non è possibile perché la figura al vertice avrebbe  $\{4, 5\}$  come simbolo, che non è ammissibile per un poliedro regolare. Infatti, dalla classificazione dei poliedri regolari concludiamo che un 4 o un 5 devono essere necessariamente seguiti da un 3. Possiamo quindi ridurre sensibilmente la lista dei nostri possibili simboli.

**Lemma 7.6.** *Se  $\Omega$  è un politopo quadridimensionale regolare, allora il suo simbolo di Schläfli è necessariamente incluso tra i seguenti:*

$$\begin{aligned} &\{3, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 3, 5\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 5, 3\}, \\ &\{4, 3, 3\}, \{4, 3, 4\}, \{4, 3, 5\}, \\ &\{5, 3, 3\}, \{5, 3, 4\}, \{5, 3, 5\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Questa lista verrà ridotta ulteriormente nelle prossime sezioni.

**7.4. Omogeneità e simmetrie.** Di nuovo per induzione sulla dimensione è possibile estendere ai politopi regolari le proprietà dei poliedri regolari che abbiamo scoperto nel Teorema 3.7 e nei Lemmi 3.9 e 3.8. In particolare

**Teorema 7.7.** *Due politopi regolari con lo stesso simbolo di Schläfli sono congruenti a meno di omotetie.*

**Teorema 7.8.** *Dati due vertici  $V$  e  $V'$  di uno stesso politopo regolare è possibile trovare un movimento rigido dello spazio che mappa  $V$  in  $V'$  e il politopo regolare in sé. Inoltre, se  $(C, C')$  e  $(C_1, C'_1)$  sono due coppie di celle adiacenti, c'è un movimento rigido che mappa il politopo in sé e la prima coppia nella seconda. Infine, se  $F$  è la figura al vertice in  $V$ ,  $r$  la retta passante per il centro di  $F$  e per  $V$  e  $T$  una trasformazione che fissa  $r$  e mappa  $F$  in sé, allora  $T$  mappa il politopo in sé.*

**Teorema 7.9.** *Se  $\Omega$  è un politopo regolare  $n$ -dimensionale allora esiste un unico punto  $O$ , che chiameremo centro, tale che i vertici di  $\Omega$  sono equidistanti da  $O$ . Inoltre, per un qualsiasi intero  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , i centri delle*

*facce  $k$ -dimensionali del politopo sono anch'esse equidistanti da  $\Omega$ . L'ipersfera che contiene i vertici viene chiamata circoscritta, quella che contiene i centri delle celle viene chiamata inscritta e le altre vengono chiamate medioinscritte. Le celle del politopo sono tangenti, nei rispettivi centri, all'ipersfera inscritta.*

Non ci soffermeremo a lungo sulla dimostrazione dei tre teoremi elencati sopra: in pratica si tratta di ripetere gli argomenti che abbiamo esaminato per i corrispondenti lemmi tridimensionali, combinandoli con un'opportuna induzione sulla dimensione dello spazio. Darò quindi solo dei veloci cenni per le idee principali.

*Dimostrazione dei Teoremi 7.9, 7.8 e 7.7.* La strategia migliore è dimostrare per induzione tutti i teoremi in contemporanea. Quindi, assumendo che tutti i teoremi siano validi quando la dimensione è al più  $n-1$ , ci prefiggiamo di dimostrare le stesse conclusioni quando la dimensione è  $n$ .

Cominciamo con il Teorema 7.8. Fissiamo  $V$  e la sua figura al vertice  $F$ . Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 3.8 scopriamo che la retta passante per  $V$  e per il centro  $O$  di  $F$  è ortogonale a  $F$  e che la sua lunghezza si calcola con il Teorema di Pitagora usando il triangolo  $VOA$  per un qualche vertice  $A$  di  $F$ . Se  $V'$  è un altro vertice,  $F'$  la corrispondente figura al vertice e  $O'$  il corrispondente centro, ne concludiamo che  $V'O'$  è ortogonale a  $F'$  e che  $VO$  è congruente a  $V'O'$ . Prendiamo quindi un movimento rigido che mappa  $V$  in  $V'$  e  $O$  in  $O'$ . Ora le figure al vertice giacciono su uno stesso iperpiano, hanno lo stesso centro e sono congruenti per ipotesi. C'è allora un movimento rigido dell'iperpiano che mappa una figura al vertice nell'altra: questo movimento rigido tiene il centro fissato. Lo possiamo estendere a un movimento rigido dello spazio che tiene la retta passante per  $V$  e  $O$  fissata. L'ultima parte del teorema garantisce che la trasformazione trovata mappa il politopo in sé.

La seconda parte segue in modo analogo: fissiamo due coppie come nella formulazione del Teorema 7.8. Sia  $V$  un vertice comune a  $C$  e  $C'$  e  $V_1$  un vertice comune a  $C_1$  e  $C'_1$ . Procedendo come nel paragrafo sopra, con un movimento rigido  $T$  mappiamo il politopo in sé e  $V_1$  in  $V$ . Sia ora  $F$  la figura al vertice in  $V$ ,  $\varkappa$  l'iperpiano che la contiene e  $D, D', D_1, D'_1$  le intersezioni di  $F$  rispettivamente con  $C, C', T(C_1)$  e  $T(C'_1)$ . Allora, per ipotesi induttiva, c'è un movimento rigido di  $\varkappa$  che mappa  $F$  in sé e mappa le coppie di celle  $(D_1, D'_1)$  in  $(D, D')$ . Questo movimento rigido fissa il centro  $O$  di  $F$  e quindi lo possiamo estendere a un movimento rigido dello spazio  $n$ -dimensionale che fissa la retta passante per  $O$  e  $V$ . Dall'ultima parte del Teorema concludiamo che questo movimento mappa il politopo in sé e per costruzione mappa la coppia di facce  $(C_1, C'_1)$  in  $(C, C')$ .

Passiamo ora alla terza parte e fissiamo due politopi regolari  $\Omega$  e  $\Omega'$  con lo stesso vertice  $V$  e la stessa figura al vertice  $F$  in  $V$ . Se consideriamo le celle di  $\Omega$  che hanno  $V$  come vertice, la sua figura al vertice in  $V$  è l'intersezione di  $F$  con essa. Per ipotesi induttiva il Teorema è valido in dimensione più

bassa e pertanto le celle di  $\Omega$  che hanno  $V$  come vertice sono celle di  $\Omega'$ . Consideriamo ora uno spigolo di  $\Omega$  che ha  $V$  come estremo: l'altro estremo  $V_1$  è comune a  $\Omega'$  e così il punto medio  $M$  di  $VV_1$ . Consideriamo la figura al vertice  $F_1$  in  $V_1$  di  $\Omega$  e la figura al vertice  $F'_1$  in  $V_1$  di  $\Omega'$ .  $M$  è comune a entrambi. Sia ora  $G_1$  la figura al vertice in  $M$  di  $F_1$  e  $G'_1$  la figura al vertice in  $M$  di  $F'_1$ . Uno spigolo di  $F'_1$  che ha  $M$  come estremo deve congiungere  $M$  con il punto medio di uno spigolo di una cella che contiene  $M$ . Ma una cella che contiene  $M$  deve anche contenere  $V$  e quindi è sia una cella di  $\Omega$  che una cella di  $\Omega'$ . In particolare, un segmento di  $F'_1$  che ha  $M$  come estremo è anche uno spigolo di  $F_1$ , e viceversa. Analogamente per tutte le facce di  $F_1$  e  $F'_1$  che hanno  $M$  come vertice. Ma allora, ne concludiamo che  $G_1$  e  $G'_1$  sono lo stesso oggetto. Quindi  $F_1$  e  $F'_1$  sono due politopi  $n - 1$ -dimensionali con un vertice e la corrispondente figura al vertice in comune. Per ipotesi induttiva sono lo stesso politopo. Quindi l'argomento che abbiamo applicato in  $V$  possiamo ora applicarlo in  $V_1$  concludendo che tutte le celle di  $\Omega$  che hanno  $V_1$  come vertice sono anche celle di  $\Omega'$ , e viceversa. Procedendo in questo modo esauriamo i vertici dei due politopi mostrando che coincidono.

Passiamo ora al Teorema 7.9. Consideriamo due celle  $F_1$  e  $F_2$  di un politopo regolare  $\Omega$  di dimensione  $n$  che hanno una faccia  $n - 2$ -dimensionale  $G$  comune.  $G$  è quindi una cella di  $F_1$  e di  $F_2$ , che sono due politopi regolari  $n - 1$ -dimensionali congruenti. Consideriamo i centri  $O_1$  e  $O_2$  di  $F_1$  e  $F_2$  e il centro  $O'$  di  $G$ . I raggi delle ipersfere inscritte a  $F_1$  e  $F_2$  sono uguali e quindi i segmenti  $O'O_1$  e  $O'O_2$  sono congruenti. Inoltre entrambi i segmenti sono ortogonali a  $G$ . Quindi le rette  $h_1$  e  $h_2$  passanti per  $O'$  e, rispettivamente, per  $O_1$  e  $O_2$  identificano un piano bidimensionale  $\varkappa$  ortogonale al piano  $n - 2$ -dimensionale che contiene la faccia  $G$ . Ma allora, se  $r_1$  e  $r_2$  sono le rette ortogonali a  $F_1$  e  $F_2$  passanti per i loro centri, esse appartengono a  $\varkappa$  e si intersecano in un unico punto  $O$ . Usando il Teorema di Pitagora e l'ipotesi induttiva, per ogni  $k$  fissato concludiamo che i centri delle facce  $k$ -dimensionali di  $\Omega$  che appartengono o a  $F_1$  o a  $F_2$  sono equidistanti da  $O$ . Ora, presa una terza cella  $F_3$  che ha una cella in comune con  $F_1$ , consideriamo la retta  $r_3$  ortogonale a  $F_3$ : vogliamo mostrare che l'intersezione tra  $r_1$  e  $r_3$  è ancora  $O$ . Passando di cella in cella concluderemo poi che  $O$  è equidistante da tutti i vertici (e quindi da tutti i centri delle facce  $k$ -dimensionali). Visto però che dal Teorema 7.8 possiamo mappare ogni coppia di celle adiacenti in ogni altra coppia di celle adiacenti, lo stesso ragionamento del Lemma 3.9 ci dà la conclusione desiderata.

Il Teorema 7.7 si dimostra in modo analogo al Teorema 3.7. Fissiamo due politopi regolari  $n$ -dimensionali con lo stesso simbolo di Schläfli e spigoli congruenti. Presi due vertici  $V$  e  $V'$  e le corrispondenti figure al vertice  $F$  e  $F'$ , sappiamo che  $F$  e  $F'$  sono congruenti per ipotesi induttiva (hanno una dimensione in meno e lo stesso simbolo di Schläfli!). Dal ragionamento usato per la prima parte del Teorema 7.8 sappiamo anche che le rette  $r$ , passante per  $V$  e il centro  $O$  di  $F$ , e  $r'$ , passante per  $V'$  e il centro  $O'$  di  $F'$ , sono ortogonali,

rispettivamente, all'iperpiano contenente  $F$  e all'iperpiano contenente  $F'$ . Allora con un primo movimento rigido mappiamo  $V$  in  $V'$  e  $O$  in  $O'$ . Poi con un secondo movimento rigido che tiene fisso l'asse  $r$  "aggiustiamo" le figure al vertice. Quindi usiamo il Teorema 7.8 per concludere che il movimento rigido mappa un politopo nell'altro.  $\square$

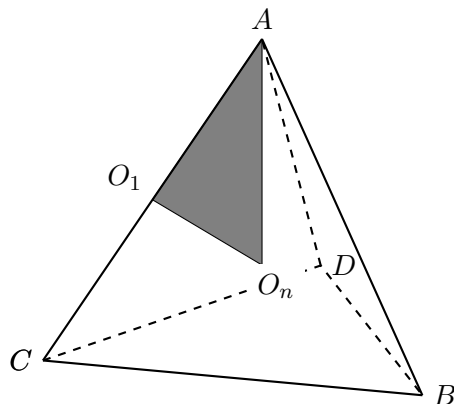


FIGURA 22

### 8. LA CONDIZIONE E IL TEOREMA DI SCHLÄFLI

In questo capitolo ridurremo sensibilmente i possibili simboli di Schläfli grazie a una seconda importante considerazione geometrica. Fissiamo un politopo regolare  $n$ -dimensionale  $\Omega$  di lato  $2\ell$ . Sia  $R$  il raggio della sfera circoscritta e prendiamo uno spigolo  $AB$  e una cella  $F$  che lo contiene. Chiamiamo, rispettivamente  $O_n$  il centro del politopo,  $O_{n-1}$  il centro della faccia e  $O_1$  il punto medio (anch'esso il centro) dello spigolo. Se  $\phi$  è l'angolo  $AO_nO_1$ , allora, considerando che  $AO_n$  è l'ipotenusa del triangolo rettangolo  $AO_nO_1$ , avremo la relazione

$$\ell = R \sin \phi \tag{6}$$

(nel caso tridimensionale si veda la figura 22). L'angolo  $\phi$  ricoprirà un ruolo fondamentale nel resto delle nostre discussioni e merita pertanto un nome: lo chiameremo angolo di Schläfli del politopo  $\Omega$ .

Consideriamo ora la figura al vertice in  $A$ : visto che essa è un politopo regolare  $n - 1$ -dimensionale possiamo ripetere il procedimento. Pertanto il punto medio  $O_1$  è ora un vertice  $A'$  della figura al vertice  $F$ , mentre il suo centro sarà un certo punto  $O'_{n-1}$ . Chiamiamo

- $2\ell'$  la misura del lato della figura al vertice;
- $R'$  il raggio della sfera circoscritta,  $R' = |O'_{n-1} - A'| = |O'_{n-1} - O_1|$ ;
- $\phi'$  l'angolo di Schläfli di  $F$ , pertanto

$$\ell' = R' \sin \phi' . \tag{7}$$

Per trovare una relazione tra  $\phi$  e  $\phi'$  esprimeremo  $\ell'$  e  $R'$  in funzione di  $\ell$  e  $R$ . Sia  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  il simbolo di  $\Omega$ . Allora  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-2}\}$  è il simbolo delle celle,  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-3}\}$  quello delle facce  $n-2$ -dimensionali e così via. In particolare le facce bidimensionali hanno simbolo  $\{p_1\}$ . Consideriamo ora una faccia bidimensionale che contiene  $AB$ . Se congiungiamo due punti medi di due segmenti consecutivi troviamo uno spigolo della figura al vertice  $F$ . Pertanto (si veda la figura 23),

$$\ell' = \ell \cos \frac{\pi}{p_1}. \quad (8)$$

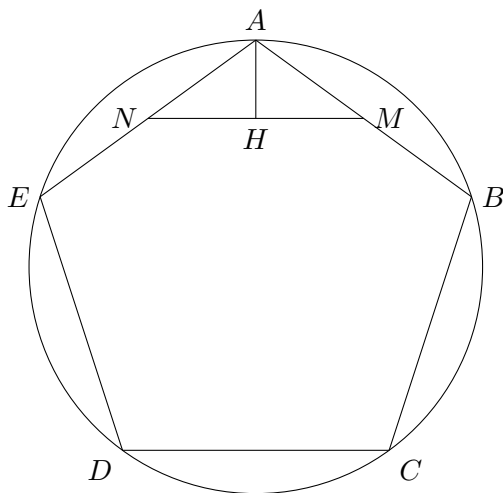


FIGURA 23.  $\ell' = |H - N| = |A - N| \sin NAH = \ell \sin NAH$ .  
Se il poligono regolare ha  $p_1$  lati, allora l'angolo in  $NAH$  misura  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p_1}$ , da cui segue (8).

Consideriamo che i vertici della figura al vertice  $F$  sono equidistanti sia dal punto  $O_n$  che dal vertice  $A$ . Pertanto la retta  $r$  passante per  $O_n$  e  $A$  è ortogonale all'iperpiano  $\varkappa$  che contiene  $F$  e i vertici di  $F$  sono equidistanti da un qualsiasi punto di  $r$ . Ma allora l'intersezione della retta  $r$  con l'iperpiano  $\varkappa$  è necessariamente il centro  $O'_{n-1}$  della figura al vertice  $F$  (si veda la figura 24).

Il triangolo  $AO'_{n-1}O_1$  è rettangolo in  $O'_{n-1}$ . Anche il triangolo  $AO_1O_n$  è rettangolo (in  $O_1$ ) e quindi l'angolo  $O_1AO'_{n-1}$  misura  $\frac{\pi}{2} - \phi$  (si veda la figura 24). Pertanto otteniamo la relazione

$$R' = |O_1O'_{n-1}| = |AO_1| \cos \phi = \ell \cos \phi. \quad (9)$$

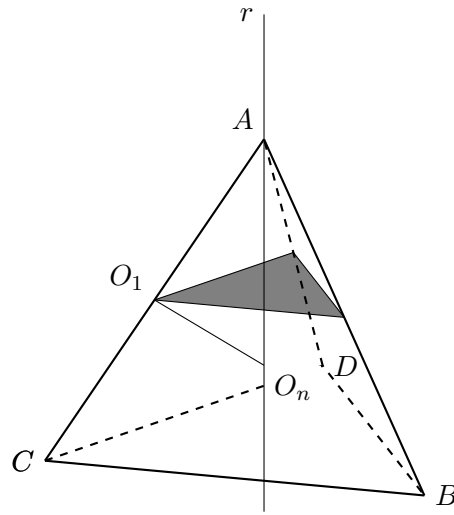


FIGURA 24. L'intersezione della retta  $r$  con la figura al vertice determina il suo centro  $O'_{n-1}$ .

Combinando le relazioni (7)-(9) otteniamo

$$\cos \phi \stackrel{(9)}{=} \frac{R'}{\ell} \stackrel{(7)}{=} \frac{\ell'}{\ell \sin \phi'} \stackrel{(8)}{=} \frac{\cos \frac{\pi}{p_1}}{\sin \phi'}. \quad (10)$$

Elevando al quadrato troviamo la formula

$$\sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{\sin^2 \phi'}, \quad (11)$$

che ci dà una relazione tra l'angolo di Schläfli del politopo e l'angolo di Schläfli della sua figura al vertice. Riassumiamo le nostre considerazioni nella seguente proposizione.

**Proposizione 8.1.** *Se  $\Omega$  è un politopo  $n$ -dimensionale regolare con simbolo di Schläfli  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  e  $\phi$  e  $\phi'$  sono gli angoli di Schläfli di  $\Omega$  e delle sue figure al vertice, allora vale la relazione (11).*

**8.1. Disuguaglianze.** Per il momento la formula non sembra così illuminante. Consideriamo allora il caso in cui il politopo sia un classico poliedro tridimensionale. Il suo simbolo sarebbe  $\{p_1, p_2\}$  e in particolare la figura al vertice sarebbe un poligono regolare con  $p_2$  lati. Il suo angolo di Schläfli  $\phi'$  sarebbe metà dell'angolo al centro (del cerchio circoscritto) sotteso dal lato del poligono, ovvero  $\phi' = \frac{\pi}{p_2}$ . Visto che il lato sinistro della (11) è un numero strettamente positivo, otteniamo la disuguaglianza

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < \sin^2 \frac{\pi}{p_2},$$

che possiamo riscrivere come

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p_2} \right).$$

Visto che gli angoli in questione sono acuti e che la funzione coseno è (strettamente) decrescente e non negativa su  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , la disuguaglianza è equivalente a

$$\frac{\pi}{p_1} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p_2}.$$

Abbiamo quindi riscoperto la condizione (1).

Se il nostro politopo è quadridimensionale, possiamo invece procedere ad esprimere l'angolo di Schläfli  $\phi'$  della figura al vertice in funzione dell'analogo angolo di Schläfli  $\phi''$  della "figura al vertice della figura al vertice". Inserendo la formula in (11) otteniamo

$$\sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_2}}{\sin^2 \phi''}}. \quad (12)$$

Questa volta, visto che il politopo è quadridimensionale, il suo simbolo sarà  $\{p_1, p_2, p_3\}$  e toccherà all'angolo  $\phi''$  soddisfare la relazione  $\phi'' = \frac{\pi}{p_3}$ . Pertanto troviamo

$$\sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_1}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_2}}{\sin^2 \frac{\pi}{p_3}}}. \quad (13)$$

Di nuovo, visto che il lato sinistro di (13) è positivo, il lato destro deve essere anch'esso maggiore di 0. Ne deriviamo allora una condizione che gli interi  $p_1, p_2$  e  $p_3$  devono soddisfare, che è l'analogia quadridimensionale della (1) ed è comunemente chiamata condizione di Schläfli. Chiaramente, il processo si può iterare e possiamo derivare condizioni analoghe in ogni dimensione. Tuttavia queste condizioni saranno rilevanti solo nel caso quadridimensionale e nel caso pentadimensionale, come vedremo tra breve.

Riprendiamo la nostra discussione dalla dimensione 4 ed usiamo l'uguaglianza (13) per derivare

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p_2}}{\sin^2 \frac{\pi}{p_3}},$$

che a sua volta possiamo riscrivere come

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_2} < \sin^2 \frac{\pi}{p_1} \sin^2 \frac{\pi}{p_3}. \quad (14)$$

Riassumiamo allora questo punto di arrivo nel seguente lemma.

**Lemma 8.2.** *Sia  $\Omega$  un politopo quadridimensionale con simbolo di Schläfli  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Allora vale la disuguaglianza (14).*



**8.2. La lista ridotta in dimensione 4.** Con un po' di pazienza possiamo ora dimostrare il seguente Teorema:

**Teorema 8.3.** *I simboli  $\{3, 5, 3\}$ ,  $\{4, 3, 5\}$ ,  $\{5, 3, 4\}$ ,  $\{5, 3, 5\}$ ,  $\{4, 3, 4\}$  non possono essere simboli di politopi regolari quadridimensionali. Pertanto la lista (5) si riduce a*

$$\{3, 3, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 4, 3\}, \{3, 3, 5\}, \{5, 3, 3\}. \quad (15)$$

Torneremo alla dimostrazione del teorema tra un momento, perché ne approfittiamo per formulare, finalmente, il Teorema di Schläfli, almeno in dimensione 4!

**Teorema 8.4.** *A meno di omotetie e movimenti rigidi ci sono esattamente 6 politopi quadridimensionali regolari, i cui simboli sono dati dalla lista (15).*

*Dimostrazione del Teorema 8.3. Il simbolo  $\{3, 5, 3\}$ .* Dalla (18) dell'Appendice A, la (14) diventerebbe

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{3}{4},$$

che sarebbe equivalente a  $\sqrt{5} < \frac{1}{2}$ , ovviamente falsa.

**I simboli  $\{4, 3, 5\}$ ,  $\{5, 3, 4\}$  e  $\{4, 3, 4\}$ .** Visto che la condizione (14) è simmetrica in  $p_1$  e  $p_3$ , basta escludere  $\{4, 3, 5\}$  e  $\{4, 3, 4\}$ . Ora, per  $\{4, 3, p_3\}$ , la condizione diventa

$$\sin \frac{\pi}{p_3} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

che quindi ammette solo la possibilità  $p_3 = 3$ .

**Il simbolo  $\{5, 3, 5\}$ .** Visto che  $\sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{\pi}{4}$  e che abbiamo già mostrato sopra che la condizione non è soddisfatta per  $\{4, 3, 4\}$ , quest'ultimo caso si esclude banalmente.  $\square$

Ovviamente per completare la dimostrazione del Teorema 8.4 dovremo mostrare che per ogni elemento della lista (15) esiste un politopo quadridimensionale di cui è il simbolo. Questa sarà infatti la parte piú dura della nota, a cui dedicheremo i prossimi capitoli. Prima di entrare nel merito vediamo cosa succede in dimensione piú alta.

**8.3. Il teorema di Schläfli in dimensione maggiore di 4.** Paradossalmente in dimensione piú alta la situazione è piú semplice.

**Teorema 8.5.** *Per ogni  $n \geq 5$  ci sono esattamente 3 politopi  $n$ -dimensionali regolari e i rispettivi simboli  $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$  sono i seguenti tre*

- (T)  $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = 3$ ;
- (C)  $p_1 = 4$  e  $p_2 = \dots = p_{n-1} = 3$ ;
- (O)  $p_1 = \dots = p_{n-2} = 3$  e  $p_{n-1} = 4$ .

Nel prossimo capitolo vedremo che i simboli in (T), (C) e (O) corrispondono, rispettivamente, alle naturali generalizzazioni del tetraedro, del cubo e dell'ottaedro. In questa sezione ci occuperemo di ridurre la lista dei simboli a questi tre candidati e spezzeremo la dimostrazione in due parti. Questa è la prima:

**Lemma 8.6.** *Se  $\Omega$  è un politopo regolare pentadimensionale e  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  il suo simbolo di Schläfli, allora quest'ultimo è uno dei tre simboli illustrati nei casi (T), (C) e (O) del Teorema 8.5.*

**8.4. Dimostrazione del Lemma 8.6: la lista in dimensione 5.** Se  $\{p_1, \dots, p_4\}$  è il simbolo di un politopo regolare, allora sappiamo che entrambi  $\{p_1, p_2, p_3\}$  e  $\{p_2, p_3, p_4\}$  sono simboli di politopi quadridimensionali regolari. In particolare devono appartenere alla lista (15). Se riportiamo la lista su due colonne giustapposte, possiamo facilmente analizzare le coppie  $\{p_1, p_2, p_3\}$  e  $\{q_2, q_3, q_4\}$  che soddisfano le “regole di combinazione”  $p_2 = q_2$  e  $p_3 = q_3$ .

$\{3, 3, 3\}$	$\{3, 3, 3\}$
$\{4, 3, 3\}$	$\{4, 3, 3\}$
$\{3, 3, 4\}$	$\{3, 3, 4\}$
$\{3, 4, 3\}$	$\{3, 4, 3\}$
$\{3, 3, 5\}$	$\{3, 3, 5\}$
$\{5, 3, 3\}$	$\{5, 3, 3\}$

Le possibilità sono allora:

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{3, 3, 3, 3}\}, \{\mathbf{3, 3, 3, 4}\}, \{3, 3, 3, 5\} \\ &\{\mathbf{4, 3, 3, 3}\}, \{4, 3, 3, 4\}, \{4, 3, 3, 5\} \\ &\{3, 3, 4, 3\} \\ &\{3, 4, 3, 3\} \\ &\{5, 3, 3, 3\}, \{5, 3, 3, 4\}, \{5, 3, 3, 5\} \end{aligned}$$

e quindi il nostro obiettivo è eliminare tutti i simboli che non sono in grassetto. A questo scopo utilizzeremo la relazione (11), dove  $\phi'$  è l'angolo di Schläfli della figura al vertice e  $\phi$  quello del politopo. In particolare otteniamo la condizione

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < \sin^2 \phi'. \quad (16)$$

**Esclusione dei casi  $\{3, 3, 3, 5\}$ ,  $\{4, 3, 3, 5\}$  e  $\{5, 3, 3, 5\}$ .** Visto che il coseno dell'angolo è decrescente, in questi casi basterà mostrare che

$$\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \geq \sin^2 \phi' \quad (17)$$

dove  $\phi'$  è l'angolo di Schläfli di  $\{3, 3, 5\}$ . Il calcolo di quest'ultimo è semplice, visto che abbiamo la formula

$$\begin{aligned}\sin^2 \phi' &= 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{5}}} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}} = 1 - \frac{1}{4 - \frac{8}{5-\sqrt{5}}} \\ &= 1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{12 - 4\sqrt{5}} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{12 - 4\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Ma allora (17) si riduce a

$$3 - \sqrt{5} \geq 7 - 3\sqrt{5},$$

che equivale a  $\sqrt{5} \geq 2$ .

**Esclusione di  $\{4, 3, 3, 4\}$  e  $\{5, 3, 3, 4\}$ .** Ragionando come sopra basta escludere il caso  $\{4, 3, 3, 4\}$ . Per questo simbolo la condizione (16) darebbe

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \phi' = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

che chiaramente non è soddisfatta.

**Esclusione di  $\{3, 3, 4, 3\}$ .** In questo caso (16) diventa

$$\frac{1}{4} < 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4}.$$

**Esclusione di  $\{3, 4, 3, 3\}$ .** In questo caso (16) diventa

$$\frac{1}{4} < 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

**Esclusione di  $\{5, 3, 3, 3\}$ .** In questo caso (16) diventa

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 < 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8},$$

che equivale a

$$10 > (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5},$$

ovvero  $2 > \sqrt{5}$ , che chiaramente è falso.

**8.5. La lista in dimensione 6 e piú.** Sappiamo che i 3 possibili simboli in dimensione 5 sono  $\{4, 3, 3, 3\}$ ,  $\{3, 3, 3, 3\}$  e  $\{3, 3, 3, 4\}$ . Pertanto in dimensione 6 le possibilità diventano solo  $\{3, 3, 3, 3, 3\}$ ,  $\{4, 3, 3, 3, 3\}$ ,  $\{3, 3, 3, 3, 4\}$  e  $\{4, 3, 3, 3, 4\}$ . Allora dobbiamo semplicemente escludere  $\{4, 3, 3, 3, 4\}$ . Infatti l'argomento con cui escluderemo l'"intruso" si può applicare induttivamente in ogni dimensione per dimostrare la seguente versione  $n$ -dimensionale del Lemma 8.6.

**Teorema 8.7.** *Se  $n \geq 5$  e  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  è il simbolo di un politopo  $n$ -dimensionale regolare, allora è uno dei simboli descritti nei casi (T), (C) e (O) del Teorema 8.5.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$  e osserviamo che il passo iniziale  $n = 5$  è stato dimostrato proprio nel Lemma 8.6. Per il passo induttivo, supponiamo di aver dimostrato il teorema in una qualche dimensione  $k \geq 5$ . Allora la lista dei possibili simboli è data da  $\{3, 3, 3, \dots, 3\}$ ,  $\{4, 3, \dots, 3\}$  e  $\{3, \dots, 3, 4\}$ . Nella dimensione successiva ci basterà escludere  $\{4, 3, \dots, 3, 4\}$ , come già osservato. Chiamiamo  $\phi_n$  l'angolo di Schläfli di un eventuale politopo  $n$ -dimensionale regolare con simbolo  $\{3, \dots, 3, 4\}$ . Dimosteremo nel prossimo capitolo che un politopo siffatto esiste ed è la generalizzazione naturale dell'ottaedro. Tuttavia possiamo procedere anche ignorando questo fatto: se il poligono non esistesse, tanto meno potrebbe esistere un politopo  $n+1$ -dimensionale di cui lui sarebbe la figura al vertice!

Allora, la formula (11) ci dà

$$\sin^2 \phi_n = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \phi_{n-1}} = 1 - \frac{1}{4 \sin^2 \phi_{n-1}}$$

Osserviamo che  $\phi_3$ , ovvero l'angolo di Schläfli dell'ottaedro classico, lo abbiamo già calcolato come

$$\sin^2 \phi_3 = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte  $\frac{1}{2}$  è un punto fisso della funzione  $1 - \frac{1}{4x}$  e ne concludiamo che  $\sin^2 \phi_n = \frac{1}{2}$  per ogni dimensione (come sarà confermato nella costruzione dell'iperottaedro, abbiamo dedotto che il suo angolo di Schläfli è  $\frac{\pi}{4}$  in ogni dimensione!). Quindi, se  $n \geq 3$ , la (16) per  $\{4, 3, \dots, 3, 4\}$  in dimensione  $n+1$  darebbe

$$\frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} < 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \phi_n} = \frac{1}{2},$$

che non può essere soddisfatta. Infatti questo è lo stesso calcolo con cui abbiamo escluso  $\{4, 3, 3, 4\}$  pochi paragrafi fa.  $\square$

## 9. L'IPERTETRAEDRO, L'IPERCUBO E L'IPEROTTAEDRO

In questo capitolo completeremo la dimostrazione del Teorema 8.5 mostrando, in ogni dimensione, l'esistenza dei 3 politopi con i simboli descritti nei punti (T), (C) e (O) del teorema. Ovviamente avremo fatto, allo stesso

tempo, un discreto progresso nel completare la dimostrazione del Teorema 8.4.

**9.1. L'ipertetraedro.** In questa sezione mostreremo l'esistenza dell'ipertetraedro, ovvero del politopo regolare  $n$ -dimensionale corrispondente al simbolo  $\{3, 3, \dots, 3\}$ . In particolare dimostreremo la seguente proposizione.

**Proposizione 9.1.** *In ogni dimensione  $n \geq 2$  esiste un politopo regolare, chiamato ipertetraedro, il cui simbolo di Schläfli è  $\{3, 3, \dots, 3\}$ . L'ipertetraedro  $n$ -dimensionale ha esattamente  $n + 1$  vertici  $A_1, \dots, A_{n+1}$  con la proprietà che tutti i segmenti  $A_i A_j$  (con  $j \neq i$ ) sono congruenti. Viceversa, un politopo  $n$ -dimensionale convesso con  $n + 1$  vertici tali che tutti i segmenti  $A_i A_j$  siano congruenti è necessariamente un ipertetraedro.*

Innanzitutto introduciamo il concetto di iperpiramide.

**Definizione 9.2.** *Nello spazio  $n$ -dimensionale una iperpiramide è un politopo convesso  $\Omega$  con la seguente proprietà:*

- *Esiste un vertice  $V$  di  $\Omega$  e una sua faccia  $F$  tale che  $\Omega$  è l'unione dei segmenti che hanno come estremi un punto di  $F$  e il vertice  $V$ .*

*Diremo in tal caso che  $\Omega$  è una iperpiramide (o, piú brevemente, una piramide) di base  $F$  e vertice  $V$ . Consideriamo inoltre la retta  $r$  passante per  $V$  e ortogonale all'iperpiano  $\varkappa$  che contiene la faccia  $F$ . L'intersezione  $H$  di  $r$  con  $\varkappa$  verrà chiamata piede dell'altezza di  $\Omega$ , mentre il segmento  $VH$  verrà chiamato altezza di  $\Omega$ .*

Siamo ora pronti per dimostrare la proposizione.

*Dimostrazione della Proposizione 9.1.* In realtà dimostreremo, per induzione su  $n \geq 2$ , un enunciato leggermente piú ricco: oltre alle affermazioni della proposizione asseriamo anche che il raggio dell'ipersfera circoscritta al tetraedro ha misura strettamente minore dello spigolo.

Notiamo che il caso bidimensionale è già noto: tre punti equidistanti tra loro sono necessariamente i vertici di un triangolo equilatero, l'unico poligono regolare con simbolo  $\{3\}$ ; inoltre il raggio della sfera circoscritta è chiaramente minore dell'altezza del triangolo, che è minore del lato. Quando  $n = 3$  sappiamo dell'esistenza del tetraedro, che è una piramide sul triangolo equilatero. Il centro del tetraedro si trova sull'altezza della piramide ed è quindi ovvio che la distanza tra esso e il vertice è minore del lato. Non abbiamo ancora *caratterizzato* il tetraedro con la proprietà che i suoi quattro vertici sono tutti equidistanti tra loro, ma si tratta di una semplice osservazione. Fissiamo un qualsiasi poliedro  $\Omega$  con quattro vertici tutti equidistanti. Sia  $F$  una sua faccia. I vertici di  $F$  sono sicuramente meno di quattro, ma devono anche essere almeno tre, quindi la faccia ha esattamente tre vertici, che essendo equidistanti tra di loro devono essere un triangolo equilatero. Quindi tutte le facce sono triangoli equilateri congruenti. Consideriamo ora un vertice  $V$ . Da  $V$  devono partire almeno tre spigoli, altrimenti il poliedro degenererebbe a una figura bidimensionale. Pertanto gli altri tre vertici del

poliedro sono tutti adiacenti a  $V$ . Sono quindi complanari e formano una figura che è una faccia di  $\Omega$ , ovvero un triangolo equilatero. Quindi dal Lemma 7.4 concludiamo che la figura al vertice è un triangolo equilatero. Ossia abbiamo dimostrato che la  $\Omega$  è un poliedro regolare.

Le considerazioni appena esposte ci suggeriscono come mostrare per induzione la proposizione. Supponiamo infatti che le nostre affermazioni siano vere in una certa dimensione  $n$ . Consideriamo un iperpiano  $\varkappa$  dello spazio  $n + 1$ -dimensionale e poggiamoci un ipertetraedro  $n$ -dimensionale di centro  $O$ , con vertici  $A_1, \dots, A_{n+1}$ . Prendiamo la retta ortogonale a  $\varkappa$  e passante per  $O$ : se  $P$  è un qualsiasi punto su  $r$  ne segue che i segmenti  $A_1P, \dots, A_{n+1}P$  sono tutti congruenti. D'altra parte quando  $P$  coincide con  $O$  la lunghezza del segmento  $PA_1$  è il raggio del cerchio circoscritto al tetraedro, che quindi è minore dello spigolo. Mentre quando  $P$  si allontana verso l'infinito, la lunghezza di  $PA_1$  tende ad infinito. C'è pertanto un punto  $P$  per il quale  $PA_1$  e  $A_1A_2$  sono congruenti: in particolare abbiamo quindi trovato  $n + 2$  punti  $A_1, \dots, A_{n+1}, P$  tali che tutti i segmenti che hanno come estremi due tra loro sono congruenti.

Mostriamo che un politopo  $n + 1$ -dimensionale convesso  $\Omega$  con  $n + 2$  vertici che hanno questa proprietà è necessariamente regolare e il suo simbolo è  $\{3, \dots, 3\}$ . Per cominciare, una qualsiasi faccia di  $\Omega$  possiede necessariamente almeno  $n + 1$  vertici (altrimenti non sarebbe  $n$ -dimensionale) ma non ne può possedere più di  $n + 1$  (perché ha meno vertici di  $\Omega$ ). Quindi ne ha esattamente  $n + 1$ . Essendo tutti equidistanti possiamo usare l'ipotesi induttiva e concludere che è un ipertetraedro  $n$ -dimensionale. Tutte le facce sono poi necessariamente congruenti, perché sono ipertetraedri  $n$ -dimensionali (e quindi hanno lo stesso simbolo di Schläfli) con spigoli congruenti.

Fissiamo ora un vertice  $V$  di  $\Omega$ . Da  $V$  partono necessariamente  $n + 1$  spigoli, altrimenti il politopo "degenererebbe". Ma allora tutti gli altri vertici di  $\Omega$  sono adiacenti a  $V$  e quindi giacciono su un iperpiano, dove delimitano proprio la corrispondente faccia di  $\Omega$ , che è quindi un ipertetraedro  $n$ -dimensionale.  $\Omega$  è allora regolare: inoltre il simbolo delle facce è  $\{3, \dots, 3\}$ , così come quello delle figure al vertice. Quindi anche il simbolo di  $\Omega$  è  $\{3, 3, \dots, 3\}$ .

Infine, per costruzione l'ipertetraedro  $n + 1$ -dimensionale è una piramide sull'ipertetraedro  $n$ -dimensionale, il cui piede dell'altezza coincide con il centro della base. Visto che il centro dell'ipertetraedro  $n + 1$ -dimensionale è equidistante dai vertici della base, si deve trovare sull'altezza della piramide. Ma allora il raggio del cerchio circoscritto, che è la distanza del centro dal vertice della piramide, è minore dell'altezza, che a sua volta è minore dello spigolo per il Teorema di Pitagora. Questo completa la dimostrazione del passo induttivo e quindi della proposizione.  $\square$

**9.2. L'ipercubo.** Passiamo ora al caso (C) del Teorema 8.5. Prima di formulare la proposizione analoga, vogliamo però introdurre il concetto di "prodotto per un segmento".

**Definizione 9.3.** Sia  $F$  un politopo convesso  $n$ -dimensionale di un iperpiano dello spazio  $n + 1$ -dimensionale e  $A$  un suo vertice. Sia  $B$  un punto sulla retta  $r$  che passa per  $A$  ed è ortogonale all'iperpiano contenente  $F$ . Il prodotto di  $F$  per il segmento  $AB$  è il politopo convesso  $G$  dato dall'unione dei segmenti  $A'B'$  dove  $A'$  è un generico punto di  $F$  e  $B' = A' + (B - A)$ .

**Proposizione 9.4.** Per ogni  $n \geq 2$  esiste un politopo  $n$ -dimensionale regolare (chiamato ipercubo) con simbolo  $\{4, 3, \dots, 3\}$ . Per  $n \geq 3$  il politopo coincide con il prodotto di una sua qualsiasi cella  $F$  e di un qualsiasi spigolo  $AB$  tali che  $A \in F$  e  $B \notin F$ . Inoltre i vertici adiacenti a un dato vertice  $V$  dell'ipercubo sono esattamente  $n$ , giacciono su  $n$  rette ortogonali passanti per  $V$  e formano un ipertetraedro  $n - 1$ -dimensionale.

*Dimostrazione.* Di nuovo vogliamo dimostrare la proposizione per induzione su  $n$ . Per  $n = 2$  e per  $n = 3$  ricadiamo nei casi noti del quadrato e del cubo. Supponiamo allora che la proposizione sia vera per ogni dimensione  $k$  compresa tra 2 e  $n \geq 3$  e mostriamola per  $n + 1$ . Prendiamo quindi un ipercubo  $n$ -dimensionale  $F$ , poggiamolo su un iperpiano  $\varkappa$  e fissiamo un suo vertice  $A$ . Sulla retta ortogonale a  $\varkappa$  e passante per  $A$  fissiamo un punto  $B$  tale che il segmento  $AB$  sia congruente agli spigoli di  $F$  e definiamo  $\Omega$  come il prodotto di  $F$  per  $AB$ .

Osserviamo che tutte le facce di  $\Omega$  sono ipercubi  $n$ -dimensionali congruenti. L'affermazione è ovvia per  $F$  e per la sua opposta  $F'$ , la faccia di  $\Omega$  che giace sull'iperpiano parallelo a  $\varkappa$  e passante per  $B$ . D'altra parte, se consideriamo una qualsiasi altra faccia, vediamo facilmente che è ottenuta dal prodotto di una faccia di  $F$  per un segmento congruente allo spigolo. La faccia di  $F$  in questione è un ipercubo  $n - 1$ -dimensionale e, per ipotesi induttiva, il suo prodotto con un segmento congruente ai suoi spigoli è un ipercubo  $n$ -dimensionale.

Sia ora  $V$  un vertice di  $\Omega$ . Allora  $V$  ha, per ipotesi induttiva,  $n$  vertici adiacenti nella faccia  $F$  (o nella faccia opposta a  $F$ ) e un  $n + 1$ -esimo vertice adiacente che giace su una retta ortogonale all'iperpiano che contiene  $F$ . Ovvero  $V$  possiede  $n + 1$  vertici adiacenti che giacciono su  $n + 1$  rette ortogonali. Senza perdere di generalità possiamo supporre che  $V$  sia l'origine del sistema di coordinate e che le rette siano gli assi coordinati. In particolare possiamo supporre che i vertici adiacenti a  $V$  siano dati da  $A_1 = (\ell, 0, \dots, 0)$ ,  $A_2 = (0, \ell, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $A_{n+1} = (0, \dots, 0, \ell)$ , dove  $\ell$  è la misura del lato dell'ipercubo. I punti  $A_1, \dots, A_{n+1}$  giacciono su un iperpiano  $n$ -dimensionale  $\varkappa$ . Inoltre, per  $i \neq j$  possiamo calcolare  $|A_i - A_j| = \sqrt{2}\ell$ . Ma allora, grazie alla Proposizione 9.1, l'intersezione di  $\Omega$  con  $\varkappa$  è un ipertetraedro  $n$ -dimensionale. Quindi, per il Lemma 7.4, le figure al vertice di  $\Omega$  sono ipertetraedri.

In conclusione, non solo abbiamo mostrato che  $\Omega$  è un politopo regolare, ma anche che il suo simbolo è  $\{4, 3, \dots, 3\}$ .  $\square$

**9.3. L'iperottaedro.** Per completare la dimostrazione del Teorema 8.5 non ci resta che mostrare l'esistenza dei politopi regolari con simbolo  $\{3, \dots, 3, 4\}$ .

Anche qui procederemo per induzione.

**Proposizione 9.5.** *Per ogni  $n \geq 2$  esiste un politopo  $n$ -dimensionale regolare con simbolo  $\{3, \dots, 3, 4\}$  e  $2n$  vertici. Per  $n \geq 3$  ogni politopo  $\Omega$  di questo tipo gode delle seguenti proprietà:*

- (a) *Il rapporto tra lo spigolo e il raggio dell'ipersfera circoscritta è  $\sqrt{2}$ .*
- (b) *Se  $V$  è un qualsiasi vertice di  $\Omega$ , allora  $2(n-1)$  dei vertici rimanenti sono adiacenti a  $V$  e giacciono pertanto su un iperpiano comune  $\varkappa$ , la cui intersezione con  $\Omega$  è un iperottaedro  $n-1$ -dimensionale  $F$ .*
- (c) *Se  $V'$  è il rimanente vertice di  $\Omega$ , allora la retta congiungente  $V$  e  $V'$  passa per il centro  $O$  di  $F$  (che è anche il centro di  $\Omega$ ).*

*Se, viceversa,  $\Omega$  è l'unione di due piramidi la cui base comune è un iperottaedro  $n-1$ -dimensionale  $F$  i cui vertici  $P$  e  $Q$  giacciono sulla retta ortogonale a  $F$  passante per il centro  $O$  di  $F$  e si trovano a distanza  $R$  da  $O$  (dove  $R$  è il raggio dell'ipersfera circoscritta a  $F$ ), allora  $\Omega$  è un iperottaedro  $n$ -dimensionale.*

*Dimostrazione.* Il lettore attento avrà notato che la formulazione della proposizione suggerisce la costruzione induttiva del politopo. Non solo: l'iperottaedro di dimensione 2 è il poligono con simbolo  $\{4\}$ , cioè il quadrato. Pertanto nel caso tridimensionale l'affermazione della proposizione è già stata dimostrata quando abbiamo costruito il classico ottaedro. Il passo iniziale dell'argomento induttivo è quindi già stato stabilito. Non ci resta che procedere con il passo induttivo.

Supponiamo allora di aver dimostrato la proposizione per un certo  $n$  e passiamo a dimostrarla per  $n+1$ . Consideriamo un iperottaedro  $n$ -dimensionale  $F$  e poggiamolo su un iperpiano  $\varkappa$  dello spazio  $n+1$ -dimensionale. Sia  $O$  il suo centro e  $r$  la retta passante per  $O$  e ortogonale a  $\varkappa$ . Se  $R$  è il raggio dell'ipersfera circoscritta a  $F$ , consideriamo i due punti  $P$  e  $Q$  su  $r$  a distanza  $R$  da  $O$ . Prendiamo quindi le due piramidi di base  $F$  e vertici, rispettivamente,  $P$  e  $Q$  e chiamiamo  $\Omega$  il politopo  $n+1$ -dimensionale che è l'unione delle due piramidi. Una qualsiasi faccia  $G$  del politopo è una piramide sulla faccia di una delle due piramidi, quindi è a sua volta una piramide che ha come base una faccia  $F'$  di  $F$  e come vertice o  $P$  o  $Q$ . Ma allora  $G$  ha  $n+1$  vertici: senza perdere di generalità possiamo assumere che uno sia  $Q$  e gli altri siano  $A_1, \dots, A_n$ , vertici della faccia  $F'$  dell'iperottaedro  $n$ -dimensionale  $F$ . Quindi  $F'$  è un ipertetraedro  $n-1$ -dimensionale e i segmenti  $A_i A_j$  misurano tutti  $\sqrt{2}R$ . D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, tutti i segmenti  $A_i P$  misurano anch'essi  $\sqrt{2}R$ . Ma allora, per la Proposizione 9.1, la faccia  $G$  è un ipertetraedro  $n$ -dimensionale. Ovviamente, visto che la misura dello spigolo è data da  $\sqrt{2}R$ , tutte le facce di  $\Omega$  sono congruenti.

Passiamo ora alle figure al vertice. Ci basta mostrare che, se  $V$  è un qualsiasi vertice di  $\Omega$ , allora i suoi vertici adiacenti sono contenuti in un iperpiano  $\bar{\varkappa}$  e  $\bar{\varkappa} \cap \Omega$  è un iperottaedro  $n$ -dimensionale. L'affermazione è vera, per costruzione, se  $V$  è  $P$  o  $Q$ . Supponiamo allora che  $V$  sia un vertice di  $F$ . Visto che (b) e (c) valgono per  $F$ , questo vuol dire che i vertici  $A_1, \dots, A_{2n-2}$



di  $F$  adiacenti a  $V$  si trovano su un piano  $n-1$ -dimensionale  $\tau$  dell'iperpiano  $\varkappa$  e  $\tau \cap F = H$  è un iperottaedro  $n-1$ -dimensionale, il cui spigolo misura  $\sqrt{2}R$ . I vertici di  $\Omega$  adiacenti a  $V$  sono allora  $A_1, \dots, A_{2n-2}, P, Q$ , e visto che  $P$  e  $Q$  giacciono sulla retta  $r$  ortogonale a  $\varkappa$  e passante per  $O$ , i vertici  $A_1, \dots, A_{2n-2}, P, Q$  sono tutti contenuti nell'iperpiano  $\varkappa'$  generato da  $r$  e da  $\tau$ . Notiamo che  $O$  è anche il centro di  $H$  (perché è equidistante dai vertici di  $H$ ), mentre  $R$  è anche il raggio dell'ipersfera circoscritta a  $H$ . Allora l'intersezione di  $\Omega$  con  $\varkappa'$  consiste dell'unione di due piramidi con base  $H$ , i cui vertici giacciono sulla retta  $r$  e distano esattamente  $R$  dal centro  $O$  di  $H$ . Pertanto, per ipotesi induttiva,  $\Omega \cap \varkappa'$  è un iperottaedro di  $\varkappa'$ . Per il Lemma 7.4 questo dimostra che la figura al vertice di  $\Omega$  in  $V$  è un iperottaedro  $n$ -dimensionale.

Quindi  $\Omega$  è un politopo regolare  $n+1$ -dimensionale e il suo simbolo è  $\{3, \dots, 3, 4\}$ , mentre altre affermazioni della proposizione sono proprio parti dell'argomento appena dato.  $\square$

#### 10. IL 24-CELLE $\{3, 4, 3\}$ : LA COSTRUZIONE DI CESARO

Per completare la dimostrazione del Teorema 8.4 non ci resta che costruire i rimanenti politopi quadridimensionali regolari, i cui simboli sono  $\{3, 4, 3\}$ ,  $\{3, 3, 5\}$  e  $\{5, 3, 3\}$ . Chiaramente ci attende il compito piú arduo.

Cominceremo con la dimostrazione dell'esistenza del politopo con simbolo  $\{3, 4, 3\}$ , che seguirà un elegante argomento di Ernesto Cesaro (che il matematico italiano espone per la prima volta in [Ces88]).

Innanzitutto vogliamo introdurre una procedura per generare politopi da altri politopi, chiamata *troncamento*. Cominciamo con il definire le cuspidi.

**Definizione 10.1.** *Sia  $\Omega$  un politopo regolare,  $V$  un suo vertice e  $\varkappa$  l'iperpiano che contiene la figura al vertice in  $V$  di  $\Omega$ . La cuspide di  $\Omega$  in  $V$  è data dall'intersezione di  $\Omega$  con il semispazio aperto delimitato da  $\varkappa$  e che contiene  $V$ .*

È facile vedere che la cuspide di  $\Omega$  in  $V$  non è altro che la piramide di vertice  $V$  e base la figura al vertice in  $V$  a cui va tolta però la base, si veda ad esempio la figura 8.

**Definizione 10.2.** *Il troncamento di un politopo regolare  $\Omega$  è dato dal politopo convesso  $\Gamma$  ottenuto rimuovendo da  $\Omega$  tutte le sue cuspidi.*

Per essere coerenti dobbiamo ovviamente mostrare che effettivamente l'insieme  $\Gamma$  è un politopo convesso. La convessità è piuttosto semplice. Enumeriamo innanzitutto gli iperpiani  $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$  che contengono le figure al vertice di  $\Omega$  in  $V_i$  e chiamiamo  $\varkappa_i^-$  il semispazio *chiuso* delimitato da  $\varkappa_i$  che non contiene  $V_i$ . Allora  $\Gamma = \Omega \cap \varkappa_1^- \cap \dots \cap \varkappa_N^-$  e visto che l'intersezione di convessi è convessa, la convessità di  $\Gamma$  segue. È poi facile vedere che i punti estremali di  $\Gamma$  sono i vertici delle basi delle cuspidi, ovvero un numero finito.

Chiaramente il troncamento di  $\Omega$  non è, in genere, un politopo regolare. Tuttavia la scoperta di Cesaro è che il troncamento dell'iperottaedro quadridimensionale è regolare.

**Teorema 10.3.** *Il troncamento del politopo regolare  $\{3, 3, 4\}$  è il politopo regolare  $\{3, 4, 3\}$ .*

La dimostrazione del teorema di Cesaro si avvarrà dei seguenti due lemmi.

**Lemma 10.4.** *Le celle del troncamento di un politopo regolare  $\Omega$  sono le figure al vertice di  $\Omega$  e i troncamenti delle celle di  $\Omega$ .*

**Lemma 10.5.** *Il troncamento di un tetraedro tridimensionale è un ottaedro.*

Nel resto del capitolo ci dedicheremo, separatamente, a questi due lemmi, dopo aver visto come ci permettono di concludere facilmente la validità del Teorema di Cesaro. Prima di inoltrarci nelle dimostrazioni vogliamo però notare un fatto interessante: il Lemma 10.4 ci dice anche che il numero di celle del  $\{3, 4, 3\}$  è la somma del numero di celle e del numero di vertici dell'iperottaedro  $\{3, 3, 4\}$ . Sappiamo già dalla Proposizione 9.5 che il numero di vertici del  $\{3, 3, 4\}$  è 8. D'altra parte sappiamo anche che l'iperottaedro  $\{3, 3, 4\}$  è una doppia piramide sull'ottaedro  $\{3, 4\}$ : quindi il suo numero di celle è il doppio del numero di facce del  $\{3, 4\}$ , ovvero  $2 \cdot 8 = 16$ . Pertanto il numero di celle del  $\{3, 4, 3\}$  è esattamente 24 e per questo il  $\{3, 4, 3\}$  viene anche chiamato "24-celle".

**10.1. Dimostrazione del Teorema 10.3.** Combinando il Lemma 10.4 con il Lemma 10.5 concludiamo immediatamente che le celle del troncamento  $\Gamma$  di  $\{3, 3, 4\}$  sono tutte ottaedri: infatti queste celle sono o figure al vertice di  $\{3, 3, 4\}$ , ovvero  $\{3, 4\}$  (cioè ottaedri), o troncamenti di  $\{3, 3\}$ , ovvero ottaedri, grazie al Lemma 10.4. Data una qualsiasi coppia  $(C, C')$  di celle di  $\Gamma$  è possibile trovare una catena  $C_1, \dots, C_n$  con la proprietà che  $C = C_1$ ,  $C' = C_n$  e (per ogni  $i \in \{2, \dots, n\}$ ) la coppia  $(C_{i-1}, C_i)$  ha uno spigolo in comune. Quindi tutte le celle sono congruenti.

Non ci resta che mostrare che le figure al vertice di  $\Gamma$  sono cubi. Cominciamo con una proprietà importante dei troncamenti, che si rivelerà utile anche in seguito.

**Lemma 10.6.** *Ogni spigolo del troncamento di un politopo regolare quadridimensionale  $\Omega$  appartiene esattamente a tre celle del troncamento, una delle quali è una figura al vertice di  $\Omega$ , mentre le altre due sono troncamenti di due celle di  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo uno spigolo  $\alpha$  del troncamento. Questo spigolo è un segmento che congiunge due punti medi di due spigoli  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  di  $\Omega$  che hanno un vertice  $V'$  in comune e appartengono a una stessa faccia bidimensionale  $\beta$ . Questo vuol dire che  $\alpha$  è uno spigolo di una sola figura al vertice dell'iperottaedro, ovvero della figura al vertice in  $V'$ . D'altra parte la faccia bidimensionale  $\beta$  appartiene esattamente a 2 celle  $C$  e  $C'$  di  $\Omega$ . Quindi  $\alpha$  è

lo spigolo di esattamente due ulteriori celle del troncamento, che sono a loro volta i troncamenti di  $C$  e  $C'$ .  $\square$

Ora, quello che dobbiamo mostrare è che, fissato un vertice  $V$  di  $\Gamma$ , i vertici  $A_1, \dots, A_q$  che sono adiacenti ad esso si trovano in uno stesso iperpiano 3-dimensionale  $\varkappa$  e che  $\varkappa \cap \Gamma$  è un cubo. Innanzitutto notiamo che, se  $A$  è adiacente a  $V$ , allora  $AV$  è uno spigolo di  $\Gamma$ , che quindi appartiene a una cella di  $\Gamma$ . Pertanto, se per ogni cella  $C$  di  $\Gamma$  che contiene  $V$  consideriamo i vertici  $A^C := \{A_1^C, \dots, A_r^C\}$  di  $C$  adiacenti a  $V$ , l'insieme  $\{A_1, \dots, A_q\}$  non è altro che l'unione degli insiemi  $A^C$ , dove  $C$  varia tra le celle che hanno  $V$  come vertice. Ora, ciascuna cella  $C$  è un ottaedro e la figura al vertice di un ottaedro è un quadrato, quindi i vertici  $A^C$  sono esattamente quattro, si trovano su un piano bidimensionale  $\pi_C$  e sono i vertici di un quadrato  $Q_C$ . Per completare la dimostrazione vogliamo far vedere che tutti questi quadrati formano effettivamente un cubo, che sarà la figura al vertice in  $V$ .

Consideriamo allora un vertice  $A_1$  adiacente ad  $A$ . Ne segue che il segmento  $AA_1$  è in comune a tre celle  $C_1, C_2, C_3$  che sono ottaedri. Quindi  $A_1$  è esattamente l'intersezione degli insiemi  $A^{C_1}, A^{C_2}$  e  $A^{C_3}$ . I tre quadrati  $Q_{C_1}, Q_{C_2}$  e  $Q_{C_3}$  concorrono in  $A_1$ . Ogni coppia di tali quadrati ha però esattamente un secondo punto in comune: questo perché, ad esempio, le celle  $C_1$  e  $C_2$  hanno una faccia in comune, ovvero essendo ottaedri hanno un triangolo in comune, e quindi tre vertici. Tra questi tre vertici ci sono già  $A_1$  e  $V$  e quindi ce n'è necessariamente solo un terzo. Ma allora i tre quadrati  $Q_{C_1}, Q_{C_2}$  e  $Q_{C_3}$  formano in  $A_1$  una porzione del bordo di un cubo tridimensionale  $H$ . Se ora consideriamo il punto  $A_2$  in comune a  $Q_{C_1}$  e  $Q_{C_2}$  possiamo iterare l'argomento e concludere che  $A_2$  è in comune a 3 celle, che sono necessariamente  $Q_{C_1}, Q_{C_2}$  e una terza  $Q_{C'}$ . A ciascuna cella corrisponde un quadrato:  $Q_{C_1}, Q_{C_2}$  e  $Q_{C'}$ . Ma il quadrato  $Q_{C'}$  ha necessariamente un lato in comune con  $Q_{C_1}$  e un lato in comune con  $Q_{C_2}$ , che sono i due lati di  $Q_{C_1}$  e  $Q_{C_2}$  che hanno  $A_2$  come estremo ma non  $A_1$ . C'è allora un solo quadrato con questa proprietà ed è una faccia di  $H$ . Procedendo in questo modo concludiamo che i vertici adiacenti ad  $A$  in  $\Gamma$  sono tutti necessariamente vertici di uno stesso cubo. Sono pertanto tutti in uno stesso iperpiano tridimensionale  $\varkappa$ .

L'argomento appena usato ci permette però anche di concludere che le facce della figura  $\varkappa \cap \Gamma$  sono necessariamente quadrati e necessariamente facce del cubo  $H$ . Ma allora  $\varkappa \cap \Gamma$  non può che essere il cubo  $H$ .

**10.2. Dimostrazione del Lemma 10.4.** L'argomento è molto semplice: una cella del troncamento  $\Gamma$  di  $\Omega$  è un sottoinsieme del bordo di  $\Gamma$  contenuto in un iperpiano. Pertanto, o la cella è contenuta in un iperpiano che contiene una cella di  $\Omega$  o in uno degli iperpiani che contengono una figura al vertice di  $\Omega$ . Nel secondo caso la cella è proprio la figura al vertice. Nel primo è l'intersezione di una cella di  $\Omega$  con  $\Gamma$ , ovvero è una cella di  $\Omega$  a cui sono state rimosse le intersezioni con le cuspidi. Ma l'intersezione della cuspidi nel vertice  $V$  con una cella  $C$  non è altro che una faccia laterale della cuspidi,

ovvero non è altro che la piramide che ha come base l'intersezione di  $C$  con la figura al vertice  $F$  di  $\Omega$  in  $V$  e come vertice  $V$  stesso. Visto che  $F \cap C$  non è altro che la figura al vertice in  $V$  della cella  $C$ , l'intersezione di  $C$  e della cuspide di  $\Omega$  in  $V$  è la cuspide di  $C$  in  $V$ . Quindi  $C \cap \Gamma$  è data da ciò che rimane della cella  $C$  una volta rimosse le sue cuspidi, ovvero  $C \cap \Gamma$  è il troncamento di  $C$ .

**10.3. Dimostrazione del Lemma 10.5.** Chiaramente, dal Lemma 10.4, il troncamento di un tetraedro ha tutte facce che sono triangoli equilateri. Le facce in questione sono in particolare le quattro figure al vertice del tetraedro e i quattro triangoli ottenuti su ciascuna faccia congiungendo i punti medi. La parte non banale è far vedere che le figure al vertice del troncamento sono effettivamente quadrati. Facendo riferimento alla figure 25 e 26, grazie al Lemma 7.4, si tratta di far vedere che i segmenti in rosso nella figura 26 sono i lati di un quadrato. Visto che per costruzione i segmenti in questione sono tutti congruenti, si tratta di far vedere che sono anche ortogonali.

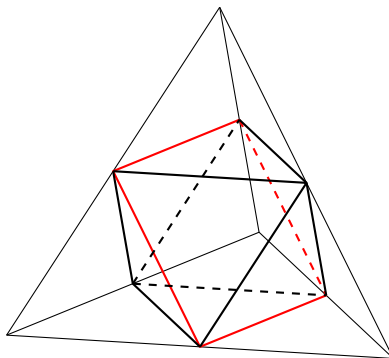


FIGURA 25. Il troncamento di un tetraedro.

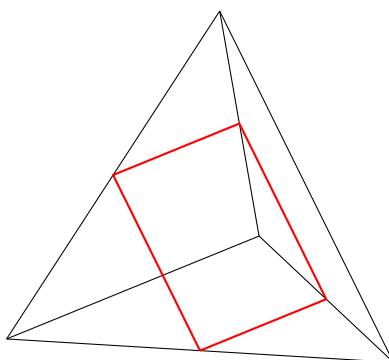


FIGURA 26. I segmenti in rosso sono tutti congruenti: per mostrare che formano un quadrato basta far vedere che sono anche ortogonali.

D'altra parte ciascun segmento è anche parallelo a uno degli spigoli del tetraedro. Infatti ogni coppia di segmenti rossi corrisponde a una coppia di spigoli del tetraedro che non ha vertici in comune. Consideriamo allora i due spigoli  $DA$  e  $CB$  nella figura 27. Quello che desideriamo mostrare è che la retta  $r$  parallela allo spigolo  $DA$  e passante per il punto medio  $H$  di  $CB$  è ortogonale a  $CB$ . D'altra parte il segmento  $DA$  appartiene al piano  $\varkappa$  generato dall'altezza del tetraedro  $DO$  e dall'altezza  $AH$  della faccia  $ABC$ . Pertanto anche la retta  $r$  appartiene al piano  $\varkappa$ . Se mostriamo che  $\varkappa$  è ortogonale a  $CB$  abbiamo allora finito.  $AH$  è chiaramente ortogonale a  $CB$ . La retta parallela a  $DO$  e passante per  $H$  è ortogonale a  $CB$ , semplicemente perché  $DO$  è ortogonale al piano su cui giace la faccia  $ABC$ . Ma allora il piano  $\varkappa$  deve essere ortogonale a  $CB$  e questo completa la dimostrazione del lemma.

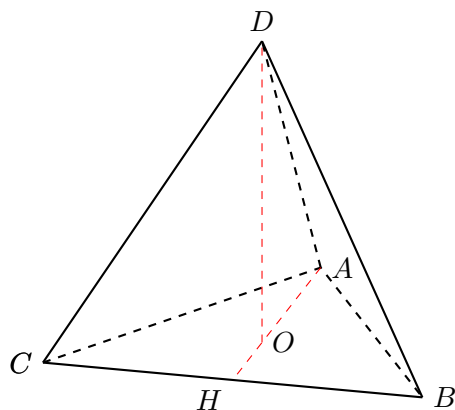


FIGURA 27

**10.4. La costruzione di Gosset.** Prima di passare al prossimo politopo regolare, considereremo una costruzione alternativa del  $\{3, 4, 3\}$  — dovuta ad un altro matematico del passato, Thorold Gosset — che ha come punto di partenza l'ipercubo (si veda [Gos99]). Consideriamo un ipercubo quadri-dimensionale  $I$ . Su ciascuna cella  $C$  dell'ipercubo possiamo sollevare una iperpiramide esterna all'ipercubo, che chiamiamo  $\alpha_C$ , in modo che l'asse della piramide passi per il centro della cella e che l'altezza della piramide sia pari a metà del lato dell'ipercubo. In pratica se  $O$  è il centro dell'ipercubo e  $O_C$  il centro della cella, allora il vertice  $V_C$  della cella si trova sulla retta che contiene  $OO_C$  e il segmento  $OV_C$  è congruente al segmento  $OO_C$ :  $V_C$  è l'immagine di  $O$  tramite una riflessione rispetto all'iperpiano contenente  $C$ . Ciascuna cella  $\alpha'$  della piramide  $\alpha_C$  è una piramide la cui base è una faccia  $F$  di  $C$ , ovvero una piramide a base quadrata, ovvero metà di un ottaedro. Visto che su ogni cella di  $C$  abbiamo poggiato una siffatta iperpiramide e che ogni faccia bidimensionale  $F$  dell'ipercubo è comune a due celle  $C$  e  $C'$ , possiamo identificare due piramidi con la stessa base quadrata che sono metà

di un ottaedro: una cella di  $C$  e una cella di  $C'$ . Non è difficile controllare che queste due celle giacciono su uno stesso iperpiano e quindi la loro unione è effettivamente un ottaedro. Pertanto la figura che abbiamo costruito ha tutte facce ottaedrali. Con un po' di ulteriore lavoro si verifica che le figure al vertice sono effettivamente cubi e abbiamo quindi una costruzione alternativa del politopo  $\{3, 4, 3\}$ , dovuta a Gosset. D'altra parte, dato un sistema di assi cartesiani, è facile ricavare le coordinate di tutti i punti del  $\{3, 4, 3\}$  tramite la costruzione di Gosset e controllare algebricamente che il politopo è regolare. In particolare avremo la seguente proposizione.

**Proposizione 10.7.** *Per ogni  $l > 0$ , i 16 punti di coordinate  $(\pm l, \pm l, \pm l, \pm l)$  e gli 8 punti  $(\pm 2l, 0, 0, 0), (0, \pm 2l, 0, 0), (0, 0, \pm 2l, 0), (0, 0, 0, \pm 2l)$  sono i vertici di un 24-celle.*

### 11. IL 600-CELLE $\{3, 3, 5\}$ : LA COSTRUZIONE DI GOSSET

In questa sezione seguiremo un'elegante idea geometrica di Gosset per costruire il politopo  $\{3, 3, 5\}$ . L'obiettivo è quindi dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 11.1.** *Esiste un politopo quadridimensionale regolare il cui simbolo è  $\{3, 3, 5\}$ .*

Tuttavia questa incombenza si rivelerà molto piú complicata della precedente.

**11.1. Il cubottaedro e l'icosaedro.** Innanzitutto introduciamo il *cubottaedro*.

**Definizione 11.2.** *Il cubottaedro è il troncamento dell'ottaedro.*

Come è facile intuire dalla figura 28 e dalla figura 29 il cubottaedro è un solido a 14 facce, 6 delle quali sono quadrati e 8 sono triangoli equilateri.

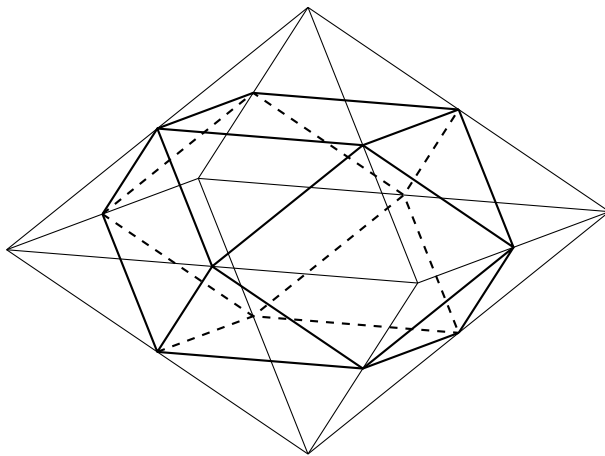


FIGURA 28. Il cubottaedro ottenuto dal troncamento di un ottaedro.

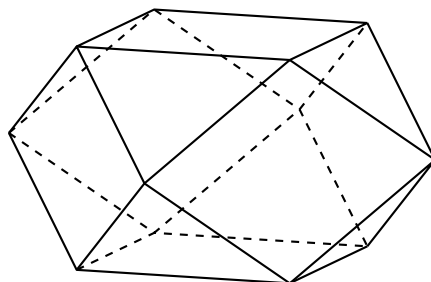


FIGURA 29. Il cubottaedro.

Supponiamo ora di effettuare un troncamento asimmetrico dell'ottaedro, ovvero di dividere ciascuno spigolo dell'ottaedro in due segmenti di rapporto  $a/b$ , alternativamente come mostrato nella figura 30 e di identificare il poliedro convesso  $\Gamma$  che ha tutti questi punti come vertici. L'esistenza di tale poliedro non è ovvia; ci occuperemo di un problema analogo in dimensione piú alta nell'Osservazione 11.4: l'argomento che daremo si adatta anche al nostro caso e si basa sull'osservazione che, se un insieme finito di punti si trova su una sfera, allora c'è un poliedro regolare che ha tali punti come vertici. D'altra parte non è difficile vedere, usando il Teorema di Pitagora, che i punti che ci interessano sono equidistanti dal centro dell'ottaedro: questo fatto verrà mostrato nel Teorema 11.3.

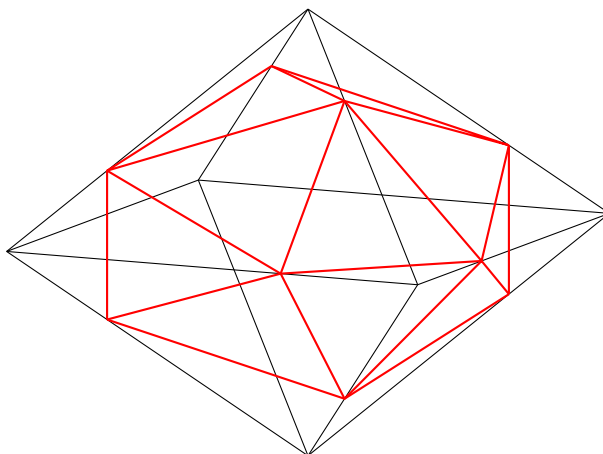


FIGURA 30. L'icosaedro irregolare  $\Gamma$  ottenuto dal troncamento asimmetrico dell'ottaedro  $\Omega$ : i punti sono scelti in modo tale che le facce di  $\Gamma$  giacenti su ciascuna faccia di  $\Omega$  siano triangoli equilateri.

Se confrontiamo col caso  $a = b$ , quando  $a < b$  ci rimangono 8 facce di  $\Gamma$  che sono triangoli equilateri giacenti sui rispettivi lati dell'ottaedro, tutti congruenti, mentre le 6 facce quadrate del cubottaedro vengono rimpiazzate

da 12 triangoli isosceli, tutti congruenti. La figura  $\Gamma$  ha allora 20 facce triangolari e può quindi essere chiamato “icosaedro irregolare”. Ora, nel caso  $a = b$  i 12 triangoli del “secondo” tipo degepi’unerano a coppie in quadrati, ovvero ciascuna diventa metà del quadrato del cubottaedro. Pertanto in questo caso la base dei 6 triangoli isosceli non equilateri è piú grande degli altri due lati. D’altra parte se  $a$  si avvicina a 0, gli 8 triangoli equilateri diventano via via piú vicini alle facce dell’ottaedro, mentre le basi dei 12 rimanenti triangoli degenerano nei rispettivi spigoli dell’ottaedro. Ne segue che c’è una precisa scelta del rapporto  $a/b$  per il quale i 20 triangoli sono tutti equilateri e congruenti.

Possiamo sospettare che il poliedro in questione sia allora l’icosaedro (regolare): un fatto bello e notevole è che i vertici dell’icosaedro sono la sezione aurea degli spigoli dell’ottaedro.

**Teorema 11.3.** *Il troncamento asimmetrico  $\Gamma$  dell’ottaedro è l’icosaedro (regolare) se e solo il rapporto è  $b/a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .*

*Dimostrazione.* Innanzitutto vogliamo mostrare che la scelta della ragione è forzata. Supponiamo che lo spigolo dell’ottaedro misuri 1 e supponiamo che, per una certa scelta dei parametri  $a$  e  $b$  con  $a < b$ , gli spigoli del troncamento asimmetrico siano tutti congruenti e quindi le facce siano tutte triangoli equilateri di lato  $\ell$ . Se consideriamo una delle facce che giace su una faccia dell’ottaedro, l’area di tali triangoli equilateri è calcolabile nel modo seguente. Essa è pari all’area delle facce del tetraedro meno l’area di tre triangoli di lati  $a$  e  $b$  che comprendono un angolo di  $\frac{\pi}{3}$ . Quindi, per le note formule della trigonometria:

$$\ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - 3 \frac{\sqrt{3}}{4} ab,$$

da cui ricaviamo  $\ell^2 = 1 - 3ab = (a + b)^2 - 3ab = a^2 + b^2 - ab$ . Consideriamo invece una faccia del troncamento asimmetrico che non sia contenuta in una faccia del tetraedro. Allora il suo spigolo ha lunghezza  $\beta = a\sqrt{2}$ ; considerando ad esempio il triangolo  $EVF$  in figura 31 vediamo che esso è isoscele, rettangolo in  $V$  e ha i cateti di lunghezza  $a$ : pertanto il segmento  $EF$  misura  $a\sqrt{2}$ . Uguagliando  $\ell$  e  $\beta$  otteniamo l’identità  $b^2 - a^2 - ab = 0$ , ovvero per la ragione  $r = b/a$  otteniamo l’equazione  $r^2 - r - 1 = 0$ , la cui unica soluzione positiva è proprio il rapporto aureo  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Ovviamente una conseguenza del nostro calcolo è anche la conclusione inversa: con la scelta  $b/a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  tutte le facce del solido  $\Gamma$  sono effettivamente triangoli equilateri. Per dedurre però che il solido in questione è l’icosaedro dovremo anche dimostrare che ogni figura al vertice è un pentagono. In pratica si tratta di mostrare che i punti  $A, B, C, D$  ed  $E$  nella figura 31 sono i vertici di un pentagono regolare.

Usando il teorema di Pitagora, non è difficile vedere che i punti  $A, B, C, D$  ed  $E$  sono tutti equidistanti dal centro  $O$  dell’ottaedro. Anche se questo fatto si può mostrare per via sintetica, per risparmiare al sottoscritto il disegno di



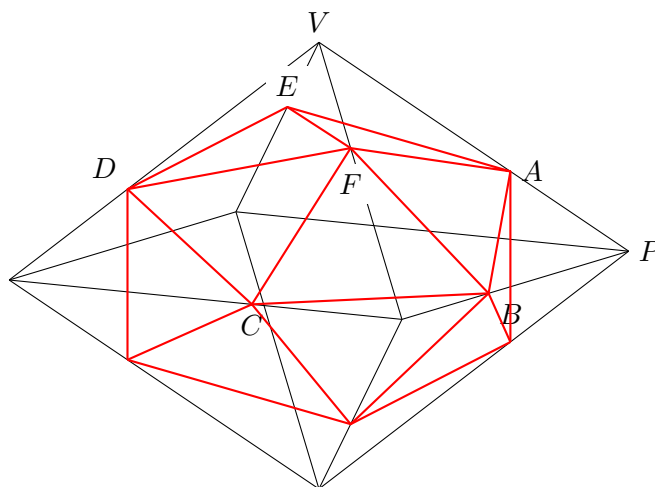


FIGURA 31. L'icosaedro regolare  $\Gamma$  ottenuto dal troncamento asimmetrico dell'ottaedro  $\Omega$  quando i vertici di  $\Gamma$  sono la sezione aurea degli spigoli di  $\Omega$ : i punti  $A, B, C, D$  ed  $E$  sono i vertici di un pentagono regolare.

un'ulteriore figura complicata procederemo per via cartesiana. Se mettiamo l'origine delle coordinate nel centro dell'ottaedro e supponiamo che i vertici  $P$  e  $V$  dell'ottaedro abbiano coordinate, rispettivamente,  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ , allora le coordinate di  $A$  saranno  $(b, 0, a)$ . Pertanto la distanza di  $A$  da  $O$  è  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Tuttavia si vede subito che il calcolo è indipendente dal punto scelto. Quindi  $A, B, C, D$  ed  $E$  giacciono su una sfera di centro  $O$ . D'altra parte giacciono anche su una sfera di centro  $F$ , visto che sono equidistanti da esso. Ma allora  $A, B, C, D$  ed  $E$  sono complanari e giacciono su un cerchio, che è poi l'intersezione delle due sfere. Visto che i segmenti  $AB, BC, CD, DE$  e  $EA$  sono congruenti, concludiamo che  $ABCDE$  è effettivamente un pentagono regolare.  $\square$

**11.2. Il troncamento simmetrico del  $\{3, 4, 3\}$ .** Supponiamo ora di fare il "classico" troncamento (quindi simmetrico) del  $\{3, 4, 3\}$ . Grazie al Lemma 10.4 il troncamento classico del  $\{3, 4, 3\}$  produce un politopo che ha 24 celle che sono troncamenti dell'ottaedro (e quindi 24 cubottaedri) e tante figure al vertice di  $\{3, 4, 3\}$ , ossia cubi, quanti sono i vertici del  $\{3, 4, 3\}$ . D'altra parte i vertici del  $\{3, 4, 3\}$  sono tanti quanti gli spigoli dell'iperottaedro (visto che il  $\{3, 4, 3\}$  è ottenuto per troncamento da esso). Gli spigoli dell'iperottaedro  $\{3, 4, 3\}$  sono il doppio dei vertici dell'ottaedro (gli spigoli "lateral" delle due iperpiramidi che formano l'iperottaedro) piú gli spigoli dell'ottaedro (ovvero gli spigoli di base delle due iperpiramidi). Ovvero sono  $2 \cdot 6 + 12 = 24$ . Quindi il troncamento del  $\{3, 4, 3\}$  ha 24 celle che sono cubottaedri e 24 celle che sono cubi.

**11.3. L'orientazione coerente del  $\{3, 4, 3\}$ .** Vorremmo ora considerare un opportuno troncamento asimmetrico del  $\{3, 4, 3\}$ . Consideriamo quindi un  $\{3, 4, 3\}$  di spigolo 1. Su ciascuno spigolo vorremmo segnare un punto che lo suddivide in due segmenti con le lunghezze di rapporto  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Vorremmo inoltre farlo in modo tale che i punti così trovati formino, in ogni faccia bidimensionale del  $\{3, 4, 3\}$ , un triangolo equilatero. Ricordiamo che le facce bidimensionali del  $\{3, 4, 3\}$  sono esse stesse triangoli equilateri. Pertanto si tratta di scegliere i punti in modo coerente: se su ogni spigolo del  $\{3, 4, 3\}$  segniamo una freccia che punta da un estremo all'altro, vogliamo scegliere le nostre frecce in modo che ogni volta che prendiamo una faccia bidimensionale  $ABC$  del  $\{3, 4, 3\}$  esse girino "tutte in un senso", ad esempio puntino da  $A$  a  $B$ , da  $B$  a  $C$  e da  $C$  ad  $A$  (che poi il verso risulti orario o antiorario non ha importanza). Una tale scelta verrà chiamata *coerente*.

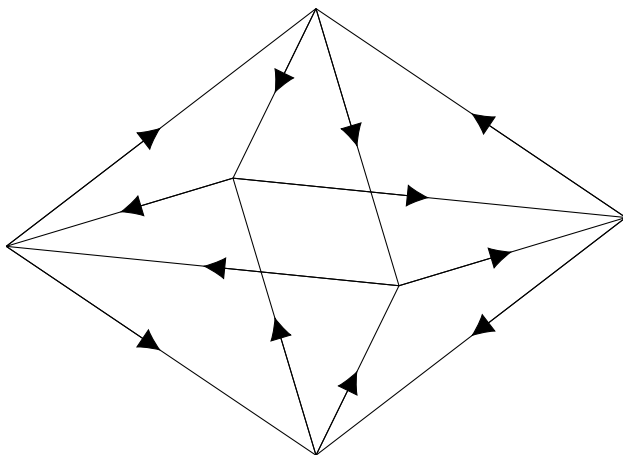


FIGURA 32. Un'orientazione coerente degli spigoli dell'ottaedro.

Sull'ottaedro sappiamo già che è possibile scegliere le frecce in modo coerente, come si può evincere dalla figura 30 (e infatti lo si può evincere anche dalla figura 32: nella costruzione dell'icosaedro come troncamento asimmetrico dell'ottaedro abbiamo implicitamente fatto uso di questa proprietà). Questo vuol dire che se guardiamo dall'esterno l'ottaedro, in ciascuna faccia le frecce girano o in senso orario o in senso antiorario: inoltre le facce orarie e antiorarie si alternano, ossia se due facce hanno uno spigolo in comune, le frecce di una faccia girano in senso orario, mentre le altre girano in senso antiorario.

Se consideriamo l'ottaedro come una coppia di triangolari a base quadrata e guardiamo come si comportano le frecce alla base delle due piramidi scopriamo che i quattro vertici sono suddivisi in due coppie di vertici opposti, diciamo  $A, C$  e  $B, D$  e le quattro frecce puntano ciascuna da un vertice della prima coppia (le sorgenti) verso un vertice della seconda coppia (i pozzi), come nella figura 33. Del resto, data una divisione dei vertici della base in

due sorgenti e due pozzi opposti, è chiaro che c'è una unica scelta coerente di frecce sul resto dell'ottaedro.

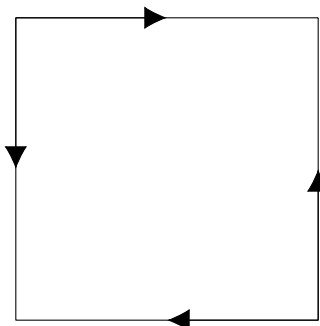


FIGURA 33. L'orientazione dei lati del quadrato orizzontale ereditata dall'orientazione degli spigoli dell'ottaedro in figura 32. I vertici in alto a sinistra e in basso a destra sono le sorgenti, mentre gli altri due sono i pozzi.

Per disegnare ora delle frecce coerenti sugli spigoli del  $\{3, 4, 3\}$  useremo la costruzione di Gosset del  $\{3, 4, 3\}$ . Riprendiamo l'ipercubo  $I$  descritto nella Sezione 10.4 e fissiamo un sistema di coordinate come nella Proposizione 10.7. Dividiamo i vertici di  $I$  in pozzi e sorgenti come segue: se il numero di coordinate negative è pari, il vertice è una sorgente, altrimenti è un pozzo. Visto che due vertici adiacenti del cubo differiscono necessariamente in una sola coordinata, tutti i vertici adiacenti a una sorgente sono pozzi, e viceversa. Disegniamo allora delle frecce su ciascuno spigolo dell'ipercubo in modo che ciascuna freccia si diriga verso un pozzo. Prendiamo ora un qualunque spigolo  $\sigma$  del  $\{3, 4, 3\}$ . Nella costruzione di Gosset esso appartiene a una cella  $D$  del  $\{3, 4, 3\}$  che è una doppia piramide su una faccia bidimensionale  $F$  dell'ipercubo. La  $F$  in questione possiede ora delle frecce come in figura 32: se  $\sigma$  è un lato della faccia, allora abbiamo già la nostra freccia. Altrimenti  $\sigma$  ha solo un vertice in comune con  $F$ : se questo è una sorgente, disegniamo la freccia in modo che si diriga verso di esso, se invece è un pozzo, partirà da esso. Le nostre frecce sono ora coerenti. Infatti, se  $G$  è una faccia bidimensionale del  $\{3, 4, 3\}$ , allora essa è una faccia bidimensionale di una cella  $C$  e quindi ha esattamente uno spigolo  $\sigma$  in comune con l'ipercubo  $I$ : la freccia di  $\sigma$  si dirige in un verso e gli altri due spigoli del triangolo  $G$  sono orientati in maniera coerente.

**11.4. Il troncamento asimmetrico del  $\{3, 4, 3\}$ .** Consideriamo ora un'orientazione coerente degli spigoli del  $\{3, 4, 3\}$  come nella sezione precedente e individuiamo su ciascuno spigolo del  $\{3, 4, 3\}$  un corrispondente punto che lo divide in due segmenti il cui rapporto delle lunghezze è appunto  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

In particolare sceglieremo il punto in modo che sia piú vicino al vertice indicato dalla freccia. Vorremmo ora considerare il politopo convesso  $\Omega_\tau$  che ha questi punti come vertici: l'insieme di tali punti verrà denotato con  $\mathcal{V}$ .

**Osservazione 11.4.** *A differenza del caso del troncamento simmetrico, non è semplice verificare che effettivamente un tale politopo convesso  $\Omega_\tau$  esiste. Un argomento non complicato, che però presuppone la conoscenza di un po' di analisi convessa, è il seguente. Prendiamo l'involuppo convesso  $\Omega_\tau$  dell'insieme  $\mathcal{V}$ , ovvero l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che contengono  $\mathcal{V}$ . Innanzitutto tale involuppo convesso è sicuramente un politopo, visto che si può mostrare che i suoi punti estremali sono necessariamente un sottoinsieme di  $\mathcal{V}$ , e quindi un insieme finito. D'altra parte non è difficile verificare che gli elementi di  $\mathcal{V}$  sono tutti equidistanti dal centro del  $\{3, 4, 3\}$  (si veda il Lemma 11.5), e quindi giacciono tutti su una ipersfera  $\gamma$ . Ma allora, per ogni elemento  $V$  di  $\mathcal{V}$  possiamo considerare l'iperpiano tridimensionale  $\varkappa$  tangente a  $\gamma$  in  $V$ . Visto che tutti i punti di  $\mathcal{V} \setminus \{V\}$  si trovano da una sola parte rispetto a  $\varkappa$ , l'involuppo convesso  $\Omega_\tau$  interseca  $\varkappa$  solo in  $V$  e ne segue facilmente che  $V$  è necessariamente un punto estremo. Pertanto i vertici di  $\Omega_\tau$  sono tutti e solo gli elementi di  $\mathcal{V}$ . Considerazioni di questo tipo sono "classiche" in analisi convessa, si veda [vT84].*

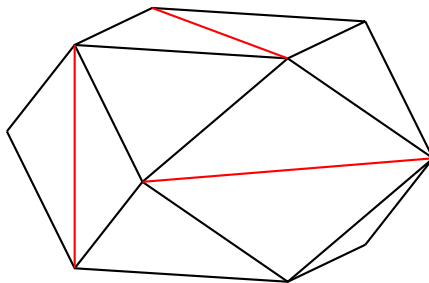


FIGURA 34. Il cubottaedro con le diagonali, limite degli icosaedri irregolari in figura 30.

Come nel caso del troncamento simmetrico, i corrispondenti troncamenti asimmetrici delle celle del  $\{3, 4, 3\}$  sono celle del politopo  $\Omega_\tau$ . Quindi, in base al Teorema 11.3,  $\Omega_\tau$  possiede 24 celle che sono icosaedri regolari, tutti congruenti. Vogliamo ora determinare le rimanenti facce. Innanzitutto osserviamo che se prendiamo  $a$  piú grande e lo avviciniamo a  $b$ , ovvero se mandiamo  $r = \frac{b}{a}$  a 1, otteniamo una famiglia di politopi  $\Omega_r$  che partono da  $\Omega_\tau$  e convergono verso il troncamento simmetrico  $\Omega_1$  del  $\{3, 4, 3\}$ . Le celle di  $\Omega_r$  che corrispondono ai troncamenti asimmetrici delle celle ottaedrali del  $\{3, 4, 3\}$  (e sono quindi icosaedri irregolari, come nella figura 30) convergono allora al troncamento simmetrico dell'ottaedro, che è un cubottaedro. Alcuni dei triangoli degli icosaedri irregolari convergono verso le facce triangolari

del cubottaedro, altri verso metà delle facce quadrate. Possiamo rappresentarci questo limite come un cubottaedro in cui sono disegnate delle diagonali sulle facce quadrate, come nella figura 34.

Ora, se consideriamo il passaggio dagli icosaedri delle figure 30 al cubottaedro “segnato” della figura 34 comprendiamo che le diagonali segnate nel cubottaedro sono limiti di segmenti che congiungono punti come  $E$  e  $F$  in figura 31 che sono piú vicini al corrispondente vertice  $V$ . In pratica i punti  $E$  e  $F$  devono giacere su spigoli le cui frecce puntano verso il vertice  $V$ . Prendiamo adesso una cella cubica  $C$  di  $\Omega_1$ . Le diagonali sulle facce ottaedrali corrisponderanno a diagonali sui quadrati della facce della cella cubica  $C$ . Ma  $C$  è una figura al vertice  $\{3, 4, 3\}$  in un determinato vertice  $V$  e ne concludiamo dall’argomento di sopra che vedremo delle diagonali in quei punti di  $C$  che appartengono a spigoli del  $\{3, 4, 3\}$  le cui frecce puntano verso  $V$ .

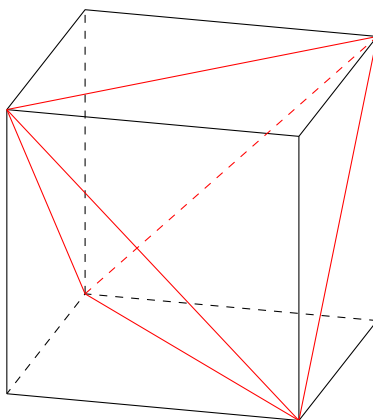


FIGURA 35. Le diagonali sulla faccia cubica del troncamen-  
to  $\Omega_1$  del  $\{3, 4, 3\}$ : il cubo viene suddiviso in un tetraedro  
regolare interno e 4 tetraedri irregolari nei quattro vertici del  
cubo in cui non concorre alcuna diagonale.

In base all’orientamento deciso sugli spigoli del  $\{3, 4, 3\}$  nella sezione precedente, gli spigoli che terminano in  $V$  e hanno frecce “entrantanti” si alternano a spigoli che hanno “frecce uscenti”: in particolare se il vertice  $A$  di  $C$  è il punto medio di uno spigolo  $\sigma$  con estremo  $V$  e freccia che punta verso  $V$ , allora ogni vertice  $A'$  di  $C$  adiacente ad  $A$  è il punto medio di un secondo spigolo  $\tau$  che ha  $V$  in comune con  $\sigma$  e appartiene a una faccia bidimensionale. Pertanto la freccia di  $\sigma$  “esce” da  $V$ . Ne concludiamo che se una diagonale rossa come in figura 35 termina in un vertice  $A$ , allora nei vertici di  $C$  adiacenti non arriva nessuna diagonale. Inoltre ciascuno spigolo del cubo  $C$  è il punto medio di uno spigolo del  $\{3, 4, 3\}$ , che a sua volta è comune ad almeno tre celle ottaedrali del  $\{3, 4, 3\}$ . Quindi, o ci sono almeno tre diagonali rosse che arrivano in un vertice di  $C$ , o non ce n’è nessuna. Visto che nel vertice

non possono arrivare piú di tre diagonali, concludiamo che vedremo un cubo con le diagonali come in figura 35.

Da questo argomento deduciamo che, quando il rapporto  $r = \frac{b}{a}$  diventa maggiore di 1, il politopo  $\Omega_r$  possiede 24 celle che sono icosaedri (irregolari, eccetto che per  $r = \tau$ ) e possiede 5 ulteriori celle tetraedrali per ogni vertice del  $\{3, 4, 3\}$ , che sono anch'essi 24, ovvero 120 celle tetraedrali, delle quali 24 sono sempre regolari e 96 sono regolari solo per  $r = \tau$ .

**11.5. La costruzione di Gosset.** Quando  $r = \tau$ , per costruzione tutti gli spigoli di  $\Omega_\tau$  sono congruenti e quindi  $\Omega_\tau$  possiede 120 facce che sono tetraedri regolari e 24 facce che sono icosaedri regolari. Abbiamo già calcolato che il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro è minore del suo spigolo. Allora, ripetendo un argomento già usato piú volte, possiamo alzare su ciascuna faccia icosaedrale di  $\Omega_\tau$  una piramide le cui celle laterali hanno spigoli tutti congruenti. Notiamo che tali celle sono tutte tetraedri regolari. Ma allora se poggiamo ventiquattro di queste piramidi sulle 24 celle icosaedrali di  $\Omega_\tau$  produciamo un politopo che ha tutte celle tetraedrali regolari e congruenti. Notiamo che ci sono 20 di queste celle per ogni icosaedro, quindi  $24 \cdot 20 = 480$ , oltre alle 120 originali di  $\Omega_\tau$ . Allora il politopo  $\Lambda$  appena costruito ha 600 celle tetraedrali.

Per controllare che il politopo  $\Lambda$  è regolare dobbiamo far vedere che le figure al vertice sono poliedri regolari. Se  $V$  è uno dei vertici delle piramidi alzate sulle celle icosaedrali di  $\Omega_\tau$ , allora segue subito che i vertici adiacenti a  $V$  formano una cella icosaedrale di  $\Omega_\tau$  e quindi la figura al vertice di  $\Lambda$  in  $V$  è un icosaedro. Per mostrare la stessa conclusione per gli altri vertici di  $\Lambda$  ci avvarremo del seguente lemma.

**Lemma 11.5.** *Supponiamo che  $O$  sia il centro del  $\{3, 4, 3\}$  dal quale è stato ricavato il politopo  $\Omega_\tau$  per troncamento asimmetrico, sul quale a sua volta abbiamo costruito il politopo  $\Lambda$ . Allora i vertici di  $\Lambda$  sono equidistanti da  $O$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un sistema di coordinate come nella Proposizione 10.7, ponendo  $\ell = \frac{1}{2}$ . Il centro dell'ipercubo  $I$  del corrispondente  $\{3, 4, 3\}$  costruito seguendo Gosset è l'origine e i vertici dell'ipercubo sono della forma  $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ . I restanti vertici del  $\{3, 4, 3\}$  sono i vertici delle piramidi, ovvero  $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1)$ . Consideriamo ora un punto  $P$  di  $\Omega_\tau$ . Visto che con un movimento rigido possiamo portare un qualsiasi spigolo del  $\{3, 4, 3\}$  su un qualsiasi altro spigolo mappando il  $\{3, 4, 3\}$  in sé (e quindi tenendo fisso il centro), possiamo supporre che  $P$  si trovi su un segmento del  $\{3, 4, 3\}$  che appartiene anche all'ipercubo e quindi che sia della forma  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2})$  o  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(a-b), \frac{1}{2})$ , a seconda dell'orientazione scelta per gli spigoli nella costruzione di  $\Omega_\tau$ . Allora il quadrato della distanza di  $P$  dall'origine è

$$R^2 = \frac{3 + (b - a)^2}{4}.$$

Visto che  $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  e  $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ , dopo facili calcoli otteniamo

$$R^2 = \frac{3 + (2 - \sqrt{5})^2}{4} = 3 - \sqrt{5} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2}.$$

Tutti i punti di  $\Omega_\tau$  si trovano allora sulla ipersfera  $\gamma$  di raggio  $R = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$  e centro l'origine.

Consideriamo ora una cella ottaedrale del  $\{3, 4, 3\}$  che contiene  $P$ . Se  $P$  è della forma

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

allora un altro punto adiacente a  $P$  di  $\Omega_\tau$  che si trova sulla sua stessa faccia icosaedrale  $C$  è

$$\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} + a\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}-3}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right).$$

Quindi, se  $\ell$  è la misura dello spigolo di  $C$ , dopo semplici calcoli troviamo

$$\ell^2 = 3 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 7 - 3\sqrt{5}.$$

Ora, il centro della cella icosaedrale  $C$  è anche il centro della corrispondente cella ottaedrale del  $\{3, 4, 3\}$ , che è dato dalle coordinate  $O' = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ . Visto che sia  $O'$  sia l'origine sono equidistanti dai vertici di  $C$ , tutti i punti sulla retta  $r$  passante per  $O$  e  $O'$  sono equidistanti dai vertici di  $C$ . Consideriamo il punto  $V$  dato dalle coordinate

$$\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Allora  $V$  è equidistante dai vertici di  $C$  e si trova sulla sfera  $\gamma$ . Se la distanza  $d$  tra  $V$  e un vertice di  $C$  equivale a  $\ell$ , allora  $V$  è il vertice della piramide che si aggiunge a  $\Omega_\tau$  sulla faccia  $C$  nella costruzione di  $\Lambda$ . D'altra parte dopo semplici calcoli troviamo

$$d^2 = 3 \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{4} = 7 - 3\sqrt{5} = \ell^2.$$

Per simmetria abbiamo allora concluso che tutti i vertici di  $\Lambda$  giacciono sulla stessa ipersfera  $\gamma$  di centro  $O$ .  $\square$

Possiamo ora completare la dimostrazione del Teorema 11.1. Fissiamo infatti un vertice  $V$  di  $\Lambda$  e fissiamo un altro vertice  $V'$  di  $\Lambda$ , del quale sappiamo che è il vertice di una piramide su una cella icosaedrale di  $\Omega_\tau$ . Sappiamo che tramite una rotazione  $R$  di centro  $O$  possiamo portare  $V'$  su  $V$ . I vertici di  $\Lambda$  adiacenti a  $V$  si trovano su una ipersfera di centro  $V$  e raggio pari alla lunghezza  $\ell$  dello spigolo di  $\Lambda$ . L'intersezione di questa ipersfera con

l'ipersfera  $\gamma$  data dal Lemma 11.5 è una sfera tridimensionale  $\alpha$ . Pertanto i vertici adiacenti a  $V$  si trovano su uno stesso spazio tridimensionale e formano un poliedro convesso  $P$ , che è la figura al vertice in  $V$  di  $\Lambda$ . Visto che le celle di  $\Lambda$  sono tutte tetraedri, ne segue anche che tutte le facce di  $P$  sono triangoli.

I vertici adiacenti a  $V'$  si trovano anch'essi sull'intersezione di due ipersfere con gli stessi raggi di quelle su cui si trovano gli spigoli adiacenti a  $V$ . Sappiamo già che la figura al vertice in  $V'$  è un icosaedro regolare  $I$ . Quindi  $I$  può essere portato, con un movimento rigido, su un icosaedro inscritto nella sfera  $\alpha$ . A meno di rotazioni possiamo portare un vertice  $A$  del poliedro  $P$  su un vertice  $A'$  di  $I$ . Quindi i vertici di  $P$  adiacenti ad  $A$  si trovano sullo stesso cerchio su cui si trova la figura al vertice in  $A'$  di  $I$  e formano una figura  $F$  con tutti i lati uguali, visto che le facce di  $P$  sono tutti triangoli. Ma la figura al vertice in  $A'$  di  $I$  è un pentagono regolare e quindi anche  $F$  deve essere un pentagono regolare, grazie al Corollario 2.5. In particolare in  $A$  arrivano cinque facce di  $P$  che sono 3 triangoli equilateri. Quindi tutte le figure al vertice di  $P$  sono pentagoni regolari congruenti. Ma allora  $P$  è un icosaedro regolare.

Questo termina l'argomento di Gosset: non solo  $\Lambda$  è un politopo regolare, ma visto che le sue celle sono tetraedri e le sue figure al vertice icosaedri, abbiamo anche scoperto che il simbolo di Schläfli di  $\Lambda$  è  $\{3, 3, 5\}$ .

## 12. LA DUALITÀ E LA COSTRUZIONE DEL 120-CELLE $\{5, 3, 3\}$

Per completare la dimostrazione del Teorema 8.4 dobbiamo mostrare l'esistenza di un politopo quadridimensionale regolare con simbolo  $\{5, 3, 3\}$ . Infatti la ricaveremo come conseguenza del seguente

**Teorema 12.1.** *Consideriamo il 600-celle  $\{3, 3, 5\}$  e l'insieme  $\mathcal{C}$  dei centri delle sue celle. Allora esiste un politopo regolare quadridimensionale che ha come vertici gli elementi di  $\mathcal{C}$ .*

Come succede per i poliedri, il teorema è infatti un caso particolare di una teoria piú generale: dato un qualsiasi insieme convesso, è possibile definire il suo duale e il duale del duale è sempre il convesso originale (a meno di omotetie). Inoltre:

- il duale di un politopo convesso è un politopo convesso;
- il duale di un politopo convesso regolare è un politopo convesso regolare;
- il simbolo del duale è ottenuto dal simbolo del politopo regolare originale invertendo l'ordine dei numeri.

Quindi gli ipertetraedri sono autoduali, così come il  $\{3, 4, 3\}$ , mentre i duali degli ipercubi sono gli iperottaedri e viceversa. Il Teorema 12.1 non è allora che un caso particolare: il duale del  $\{3, 3, 5\}$  è il  $\{5, 3, 3\}$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto, se  $O$  è il centro del  $\{3, 3, 5\}$ , che d'ora in poi chiameremo  $\Lambda$ , i punti di  $\mathcal{C}$  si trovano sulla ipersfera di centro  $O$  inscritta in



esso. Pertanto, con l'argomento dell'Osservazione 11.4 concludiamo subito l'esistenza di un politopo convesso  $\Omega$  di cui i punti di  $\mathcal{C}$  sono i punti estremali, ovvero i vertici. Notiamo inoltre che ogni spigolo di  $\Omega$  connette i due centri di due celle di  $\Lambda$  che hanno una faccia bidimensionale comune. Pertanto, dal Teorema 7.8 concludiamo che gli spigoli di  $\Omega$  sono tutti congruenti. Ora, se consideriamo un vertice  $V$  di  $\Lambda$ , la cuspide in  $V$  è una piramide su una base icosaedrale, con il piede dell'altezza che coincide con il centro dell'icosaedro. La retta  $r$  contenente l'altezza passa inoltre per il centro del  $\{3, 3, 5\}$ . I centri delle facce che hanno  $V$  come vertice sono equidistanti dal centro dell'icosaedro, ma anche da  $V$ . Quindi giacciono sull'intersezione di due ipersfere, che è una sfera 3-dimensionale contenuta in un iperpiano  $\varkappa$  ortogonale a  $r$ . Se tagliamo  $\Lambda$  con  $\varkappa$ , stiamo in realtà tagliando la cuspide di  $\Lambda$  in  $V$  con  $\varkappa$  e tale sezione è allora omotetica alla base della cuspide, ovvero è un icosaedro regolare. I centri delle facce di  $\Lambda$  che hanno  $V$  come vertice sono i centri delle facce di questo icosaedro: sappiamo allora che questi sono i vertici di un dodecaedro contenuto in  $\varkappa$ .

Non è difficile vedere che tutti i punti di questo dodecaedro sono nella frontiera di  $\Omega$  e viceversa che  $\Omega \cap \varkappa$  coincide con il dodecaedro: il dodecaedro è una cella di  $\Omega$  e le celle di  $\Omega$  sono tutte e solo ottenute in questo modo. Per vederlo procederemo così. Consideriamo per ogni vertice  $V$  di  $\Lambda$  l'iperpiano  $\pi_V$  su cui si trovano i centri delle celle che hanno  $V$  come vertice e chiamiamo  $\pi_V^+$  il semispazio chiuso delimitato da  $\pi_V$  che contiene tutti i punti di  $\mathcal{C}$ . Prendiamo l'intersezione  $\Omega'$  di tutti questi semispazi, che è un convesso. Fissiamo un punto  $A$  di  $\mathcal{C}$ . Esso appartiene a una cella  $C$  che, essendo un tetraedro, ha esattamente quattro vertici  $V_1, \dots, V_4$ . I corrispondenti iperpiani  $\pi_{V_1}, \dots, \pi_{V_4}$  sono ortogonali a  $OV_1, \dots, OV_4$ , che sono quattro vettori linearmente indipendenti. Pertanto, l'intersezione dei corrispondenti semispazi  $\pi_{V_1}^+ \cap \pi_{V_2}^+ \cap \pi_{V_3}^+ \cap \pi_{V_4}^+$  ha il punto  $A$  come punto estremo. Quindi  $\Omega'$  ha  $A$  come punto estremo. D'altra parte è vero anche il viceversa:  $\Omega'$  è un politopo che ha tutte le celle dodecaedrali, con vertici contenuti in  $\mathcal{C}$  (l'argomento è analogo a quello usato nella costruzione del dodecaedro). Pertanto i punti estremali di  $\Omega'$  sono proprio i punti di  $\mathcal{C}$ . Ora, una qualsiasi figura convessa è univocamente determinata dai suoi punti estremali (si veda [vT84]). Ne segue che  $\Omega = \Omega'$  e che tutte le celle di  $\Omega$  sono dodecaedri congruenti.

Fissiamo adesso un vertice  $A$  di  $\Omega$ , che è il centro di una cella  $C$  di  $\Lambda$ . Ogni spigolo di  $\Omega$  che ha  $A$  come estremo connette  $A$  al centro di una cella adiacente a  $C$ , ovvero a una cella che ha una faccia in comune con  $C$ . Ma  $C$  è un tetraedro, quindi ci sono esattamente quattro spigoli che "escono" da  $A$ . Prendiamo i punti medi degli spigoli, che sono quattro,  $M_1, M_2, M_3, M_4$ : con il vertice  $A$  formano la cuspide di  $\Omega$  in  $A$ . Ma visto che sono 5 punti, concludiamo che la cuspide è necessariamente una piramide le cui celle sono tutte tetraedri (possibilmente irregolari, per il momento). Questo vuol dire che ciascuna coppia di spigoli che concorre in  $A$  sono lati consecutivi di una

faccia bidimensionale di  $\Omega$ , ma tutte le facce bidimensionali di  $\Omega$  sono pentagoni regolari congruenti. Quindi  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sono tutti equidistanti. D'altra parte quattro punti identificano un iperpiano e, per la caratterizzazione del tetraedro, se sono equidistanti formano i vertici di un tetraedro regolare.

Ma allora abbiamo concluso che le figure al vertice di  $\Omega$  sono tutti tetraedri regolari. Questo completa la dimostrazione del teorema. Notiamo che una conseguenza del teorema è che il simbolo del politopo appena trovato è  $\{5, 3, 3\}$  e abbiamo quindi completato la dimostrazione del teorema.  $\square$

Una conseguenza della dimostrazione è anche che il numero di celle del  $\{5, 3, 3\}$  è pari al numero di vertici del  $\{3, 3, 5\}$ . Ora, ricordiamo che il numero di celle del  $\{3, 3, 5\}$  è 600. D'altra parte ogni cella è un tetraedro regolare, che contiene quindi 4 vertici. Se  $V$  è un vertice, sappiamo che le celle che hanno  $V$  come vertice è pari al numero di facce della figura al vertice in  $V$ , che nel caso del  $\{3, 3, 5\}$  è un icosaedro. Quindi ogni vertice del  $\{3, 3, 5\}$  è comune a esattamente 20 celle. Ne segue che il numero di vertici del  $\{3, 3, 5\}$  è  $\frac{600 \cdot 4}{20} = 120$ . Pertanto il numero di celle del  $\{5, 3, 3\}$  è 120, che è il motivo per cui viene spesso chiamato 120-celle.

#### APPENDICE A. IL PENTAGONO REGOLARE

**Teorema A.1.** *L'apotema e il lato di un pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio 1 misurano, rispettivamente,  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$  e  $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ . In particolare abbiamo le identità*

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}. \quad (18)$$

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $A, B, C, D$  ed  $E$  i vertici del pentagono e tracciamo le diagonali  $EB, EC$  e  $DB$ , come in figura 36. Chiamiamo poi  $H$  l'intersezione di  $EC$  e  $DB$ .

I triangoli  $DCB, ECD$  e  $EAB$  sono tutti isosceli e congruenti. Gli angoli al vertice di tali triangoli misurano  $\frac{3\pi}{5}$ , quindi gli altri due angoli misurano  $\frac{\pi}{5}$ . In particolare l'angolo  $HBE$  misura anch'esso  $\frac{\pi}{5}$ . Ne concludiamo che i triangoli  $EAB$  e  $BHE$  sono isosceli e congruenti, mentre  $DHC$  è simile a entrambi. Allora, se  $\ell$  è la misura del lato e  $d$  la misura della diagonale, ne deduciamo che

$$\begin{aligned} |H - C| &= d - \ell \\ |H - C| : \ell &= d : \ell. \end{aligned}$$

In particolare abbiamo  $\ell^2 = d(\ell - d)$  da cui ricaviamo facilmente  $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}d$  e  $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ell$ .

Tracciamo ora il diametro del cerchio circoscritto al pentagono passante per  $A$  e chiamiamo  $J$  la sua intersezione con la diagonale  $EB$ ,  $K$  la sua intersezione con il lato  $DC$  e  $O$  il centro (si veda la figura 37).

Sappiamo già che l'angolo  $JBA$  misura  $\frac{\pi}{5}$ . D'altra parte l'angolo  $ODC$  è metà di  $\frac{2\pi}{5}$  ovvero  $\frac{\pi}{5}$ . Ne segue che i due triangoli  $JBA$  e  $OKD$  sono simili, da cui, visto che il raggio  $OD$  misura 1, deriviamo che l'apotema  $OK$  misura  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ .

D'altra parte, tramite il Teorema di Pitagora applicato al triangolo  $OKD$  troviamo che

$$\ell^2 = 4|D - K|^2 = 4 \left( 1 - \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \right)^2 \right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}. \quad \square$$

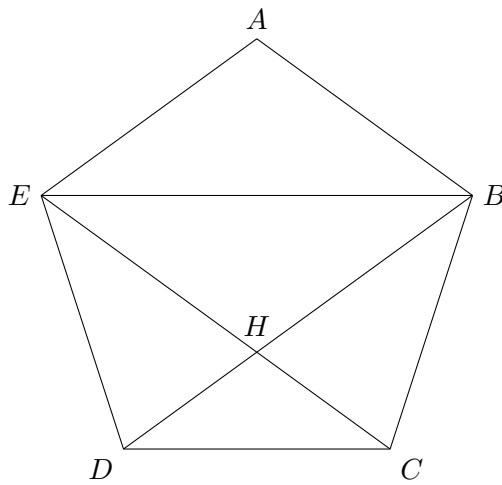


FIGURA 36

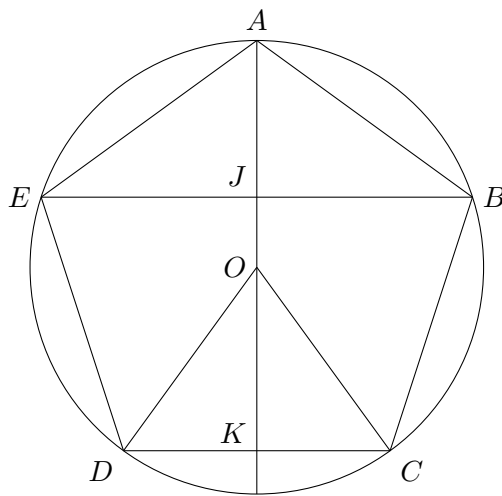


FIGURA 37

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AC09] G. Anichini and G. Conti. *Geometria analitica e algebra lineare*. Pearson. Prentice Hall., 2009.
- [Brø83] A. Brøndsted. *An introduction to convex polytopes*, volume 90 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [Ces88] E. Cesaro. Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazii. Lisboa Mem, 1888.
- [Cox49] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Methuen & Co., Ltd., London; Pitman Publishing Corporation, New York, 1948, 1949.
- [Cox89] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. Reprint of the 1969 edition.
- [Ded99] M. Dedò. *Forme: simmetria e topologia*. Collana di matematica. Testi e manuali. Decibel/Zanichelli, 1999.
- [Gos99] T. Gosset. On the regular and semi-regular figures in space of  $n$  dimensions. Messenger (2) 29, 43-48, 1899.
- [Gre93] M. J. Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean geometries*. W. H. Freeman and Company, New York, third edition, 1993. Development and history.
- [Jan94] K. Jänich. *Topologia*. La cultura matematica. Zanichelli, 1994.
- [Roc70] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [Sch01] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Hrsg. im Auftrage der Denkschriften-Kommission der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft von J. H. Graf. 1901.
- [vT84] J. van Tiel. *Convex analysis. An introductory text*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ZÜRICH, CH-8057 ZÜRICH  
E-mail address: [camillo.delellis@math.uzh.ch](mailto:camillo.delellis@math.uzh.ch)