ФЛАГИ И КАРТОГРАФИЧЕСКАЯ ГРУППА ГРОТЕНДИКА.

В.А.Воеводский.

I. Картографическая группа.

1.0 Картографическая группа Гротендика C_n задается копредставлением:

$$C_n = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \mid \sigma_i^2 = 1,\ (\sigma_i \sigma_j)^2 = 1 \text{ при } |i-j| \geqslant 2 \rangle.$$

Симплициальная картографическая группа $C_{n,3}$ получается из C_n добавлением соотношений $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$ при $0 \leqslant i \leqslant n-2$. Аналогично можно определить кубическую картографическую группу $C_{n,4}$ добавляя к C_n соотношения $(\sigma_0 \sigma_1)^4 = 1$, $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Ориентированной картографической группой называется подгруппа C_n^+ индекса 2 в C_n порожденная попарными произведениями образующих σ_i. Так же определяются $C_{n,3}^+$ и $C_{n,4}^+$.

1.1 Подгруппа в C_n порожденная $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ изоморфна группе автоморфизмов $(n+1)$-мерного симплекса Δ^n, т.е. симметрической группе S_{n+1}. При этом изоморфизме σ_i переходит в транспозицию $(i+1, i+2)$.

Аналогичнная подгруппав C_n^+изоморфна знакопеременной группе A_{n+1}.

Подгруппа в $C_{n,4}$ (соответственно в $C_{n,4}^+$) порожденная $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}$ (соответственно $\sigma_i \sigma_j$ при $i, j \leqslant n-1$) изоморфна групе автоморфизмов $(n+1)$-мерного куба I^{n+1}(соответственно группе автоморфизмов сохраняющих ориентацию).

1.3 $C^{+}_{2,3} \cong PSL_2(\mathbb{Z})$. Изоморфизм имеет вид:

$$\sigma_0\sigma_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Ориентацией C_n-множества X называется морфизм C_n-множеств $\nu: X \longrightarrow C_n/C^{+}_{n}$. X назыается ориентируемым если у него существует ориентация. Очевидно это равносильно тому, что стабилизатор любого элемента X содержится в C^{+}_{n}.

Для каждого ориентированного C_n-множества (X,ν) обозначим через X^{+} прообраз отмеченной точки C_n/C^{+}_{n} относительно ν. Сопоставление $(X,\nu) \longrightarrow X^{+}$ продолжается до эквивалентности категории ориентированных C_n-множеств и категории C^{+}_{n}-множеств. Зададим обратную эквивалентность правилом

$$Y \longrightarrow Y \times \{1,-1\},$$

где действие C_n на $Y \times \{1,-1\}$ имеет вид:

$$\sigma_i(y,1)=(\sigma_0\sigma_i(y),-1)$$
$$\sigma_i(y,-1)=(\sigma_i\sigma_0(y),1).$$

2. Симплициальное множество связанное с C_n-множеством.

2.0 Для каждого невырожденного симплекса σ размерности k в Δ^n (т.е. (k+1)-элементного подмножества в $\{0,\ldots,n\}$)

обозначим через $C_n(\sigma)$ подгруппу в C_n порожденную σ_i для $i\mu\sigma$. Очевидно для каждого i, $0\leqslant i\leqslant \dim\sigma$ мы имеем включение $C_n(\sigma) X C_n(\partial_i\sigma)$.

Для C_n-множества X определим полусимплициальное множество $\tilde{N}(X)$ правилом:

$$\tilde{N}(X)_k = \coprod_{\dim\sigma=k} X/C_n(\sigma).$$

Опреаторы граней определяются очевидным образом. Обозначим через N(X) симплициальное множество ассоциированное с $\tilde{N}(X)$.

2.1 Очевидно $N(*)\cong\Delta^n$, $N(C_n/C_n^+)\cong\Delta^n \coprod_{\partial\Delta^n} \Delta^n$.

2.2 Сопоставление $X \longrightarrow N(X)$ продолжается до функтора из категории C_n-Sets C_n-множеств в категорию Δ^{op}-Sets симплициальных множеств.

2.3 Если X ориентируемо, то ориентация определяет морфизм $N(X) \longrightarrow N(C_n/C_n^+)$. Геометрическая реализация $|N(C_n/C_n^+)|$ симплициального множества $N(C_n/C_n^+)$ гомеоморфна n-мерной сфере S^n и непрерывное отображение $|X| \longrightarrow S^n$ является накрытием неразветвленным над дополнением к (n-2)-мерному остову n-мерного симплекса стандартно вложенного в S^n. Обозначим это дополнение через U_n. Вместе с конструкцией п.1.4 это определяет функтор из категории C_n^+-множеств в категорию неразветвленных накрытий над U_n эквивалентную категории $\pi_1(U_n)$-множеств.

2.4 Группа $\pi_1(U_n)$ может быть заданна образующими x_{ij}

$i,j\varepsilon\{0,..,n\}$ и соотношениями:

$$x_{ij}x_{ji}=1$$
$$x_{ij}x_{jk}x_{ki}=1.$$

Геометрически образующей x_{ij} отвечает обход вокруг $(n-2)$-мерной грани $\{0,..,\hat{i},..,\hat{j},..n\}$ симплекса Δ^n. В частности как абстрактая группа $\pi_1(U_n)$является свободной группой от n образующих.

2.5 Функтор сопоставляющий C_n^+-множеству X^+ накрытие $|N(X)| \longrightarrow S^n$ изоморфен функтору индуцированному проекцией $\pi_1(U_n) \longrightarrow C_n^+$ переводящей x_{ij} в $\sigma_i\sigma_j$. В частности он вполне строгий.

3.Картографическая группа и флаговые множества симплициальных псевдомногообразий.

3.0 Симплициальное множество X называется симплициальным псевдомногообразием размерности n если выполнены следующие условия:

а. Каждый невырожденный симплекс X является гранью некоторого невырожденного n-мерного симплекса.

б. Для каждого невырожденного $(n-1)$-симплекса σ_{n-1} найдутся в точности две различные пары $(i,\sigma_n),(j,\sigma_n')$, где $\sigma_n,\sigma_n'\varepsilon X_n$, $0\leqslant i,j\leqslant n$ такие, что σ_n,σ_n'- невырожденны и $\sigma_{n-1}=\partial_i\sigma_n=\partial_j\sigma_n'$.

в. Если σ,σ' - невырожденные n-симплексы X, то найдется последовательность $\sigma=\sigma_0,\sigma_1,..,\sigma_k=\sigma'$ невырожденных n-симплексов такая, что σ_i и σ_{i+1} имеют общую невырожденную (n-1)-мерную грань.

3.1 Если геометрическая реализация симплициального множества является связным многообразием размерности n, то оно является симплициальным псевдомногообразием. Такие псевдомноогообразия будем называть неособыми. Обратное утверждение не верно уже в размерности 2. В общем случае геометрическая реализация псевдомногообразия является "коническим пространством", т.е. окрестность каждой точки гомеоморфна конусу над коническим пространством на единицу меньшей размерности.

3.2 Для любого транзитивного ориентируемого C_n-множества X симплициальное множество N(X) является n-мерным симплициальным псевдомногообразием.

3.3 Пусть X n-мерное симплициальное псевдомноогобразие. Флаговым множеством X называется множесто F(X) последовательностий $((\sigma_n,i_n),..(\sigma_1,i_1),\sigma_0)$ таких, что σ_k является невырожденным k-мерным симплексом X и $\partial_{i_k}\sigma_k=\sigma_{k-1}$. Для каждого флага $f=((\sigma_n,i_n),..(\sigma_1,i_1),\sigma_0)\varepsilon F(X)$ и каждого j, $0\leqslant j\leqslant n$ найдется единственный флаг $((\sigma_n',i_n'),..(\sigma_1',i_1'),\sigma_0')$ такой что $(\sigma_k,i_k)=(\sigma_k',i_k')$ при $k\neq j$ и $(\sigma_j,i_j)\neq(\sigma_j',i_j')$. Обозначим его через $\sigma_j(f)$. Это определеят действие $C_{n,3}$ (и, следовательно, C_n) на множестве F(X).

3.4 Флаговое множество n-мерного симплициального псевдомногообразия X ориентированно как C_n-множество тогда и только тогда, когда X ориентированно как псевдомногообразие, т.е. когда $H^1(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$.

3.5 Если X неособое симплициальное ориентируемое псевдомногообразие, то N(F(X)) изоморфно как симплициальное множество барицентрическому подразделению X. В общем случае не верно, что |N(F(X))| гомеоморфно |X|, однако всегда когда X ориентируемо существует отображение $|N(F(X))| \longrightarrow |X|$, задающее "нормализацию" |X|. Так например единственными особенностями в двумерном ориентируемом случае могут быть кратные точки и указанное отображение "разрешает" их в обычном смысле. В частности для любого ориентированного X размерности $\leqslant 2$ псевдомногообразие N(F(X)) неособо.

3.6 Пусть M некоторое триангулированное многообразие. Тогда аналогично тому как это было сделанно в 3.3 можно определить флаговое множество F(M), которое будет C_n-множеством. Ориентация M определяет ориентацию F(M) и, следовательно, накрытие $M\cong|N(F(M)| \longrightarrow S^n$ неразветвленное вне (n-2)-мерного остова Δ^n. При этом прообраз грани Δ^n отвечающей подмножеству {0,..k} совпадает с k-мерным остовом исходной триангуляции M при $k\leqslant n-1$.