Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte

P. Deligne et A. B. Goncharov*

Résumé. Nous définissons la catégorie des motifs de Tate mixte sur l'anneau des S-entiers d'un corps de nombres, et le groupe fondamental motivique (rendu unipotent) d'une variété unirationnelle sur un corps de nombres. Nous considérons plus en détail le groupe fondamental motivique de la droite projective moins 0, ∞ et les racines N-ièmes de l'unité.

Abstract. We define the category of mixed Tate motives over the ring of S-integers of a number field. We define the motivic fundamental group (made unipotent) of a unirational variety over a number field. We apply this to the study of the motivic fundamental group of the projective line punctured at zero, infinity and all N-th roots of unity.

*Research partially supported by NSF Grant DMS-0099390

0. Introduction.

Si k est un corps de nombres, on dispose d'une catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(k)$ des motifs de Tate mixte sur k, pour laquelle les groupes d'extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ ont la relation désirée avec les groupes de K-théorie de k. C'est le coeur d'une t-structure sur une sous-catégorie de la catégorie triangulée motivique de Levine (1998) ou Voevodsky (2000). La conjecture d'annulation de Beilinson Soulé est vraie sur k, et c'est ce qui permet de définir la t-structure requise. Par Levine (1998) et Huber (2000), on dispose sur cette catégorie tannakienne de foncteurs fibres "réalisation" correspondant aux théories de cohomologie usuelles (sauf que la cohomologie cristalline n'a jusqu'à présent pas été considérée).

Variante: soient S un ensemble de places finies de k et $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers de k. De façon peut-être artificielle, mais commode, on peut définir la catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$ de motifs de Tate mixte sur $\mathcal{O}_S$ comme une sous-catégorie de $\mathrm{MT}(k)$. Voir 1.7.

Autre variante: par descente d'une extension finie galoisienne k_1 à k, on définit la catégorie tannakienne $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ des motifs d'Artin-Tate mixte, qui deviennent de Tate mixte sur k_1. Passant à la limite sur k_1, on obtient la catégorie $\mathrm{MAT}(k)$ des motifs d'Artin-Tate mixte sur k. Elle contient celle des motifs d'Artin (représentations rationnelles de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$).

Dans Deligne (1989), l'un de nous a défini, pour certaines variétés algébriques X sur k, un "système de réalisations" du groupe fondamental $\pi_1(X, 0)$ rendu unipotent: une algèbre de Hopf commutative dans une catégorie de Ind-systèmes de réalisations – ou plutôt son spectre. Si X est unirationnelle, nous construisons ici un groupe fondamental rendu unipotent motivique $\pi_1(X, 0)_{\mathrm{mot}}$: une algèbre de Hopf commutative dans la catégorie Ind-$\mathrm{MAT}(k)$ des Ind-objets de $\mathrm{MAT}(k)$ dont la précédente se déduise par application du foncteur réalisation. Ceci implique des bornes supérieures sur la taille de l'action de Galois sur le complété ℓ-adique du π_1 (cf. Hain, Matsumoto (2001)), et sur le degré de transcendance de corps engendrés par des périodes.

Nous considérons aussi le cas de points base "à l'infini". Nous le faisons à peu de frais, en utilisant que le foncteur "réalisations" est pleinement fidèle et réflète les sous-quotients: pour prouver qu'un système de réalisations est motivique, i.e. provient d'un objet de $\mathrm{MAT}(k)$, il suffit de l'exhiber comme sous-quotient d'un autre système de réalisations dont on sache déjà qu'il est motivique.

Dans la fin de l'article, nous utilisons ces constructions dans le cas où X est le complément, dans $\mathbb{P}^1$, de 0, ∞ et du groupe μ_N des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous obtenons des résultats sur la structure de l'action du groupe de Galois motivique sur le π_1. Pour $N = 1$, ils impliquent les résultats de Terasoma (2002) donnant la partie "borne supérieure" de la conjecture de Zagier sur le nombre de valeurs multizêta de poids w linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

1. Motifs de Tate mixte sur l'anneau des S-entiers d'un corps de nombres.

1.1. Soit k un corps. Nombre de résultats cités dépendant de la résolution des singularités, nous supposons k de caractéristique 0. Hanamura (1995), Levine (1998) et Voevodsky (2000) ont chacun défini une catégorie triangulée de motifs sur k, et Levine (1998) VI 2.5.5 construit une équivalence entre sa catégorie triangulée et celle de Voevodsky. Cette dernière sera pour nous la plus commode. Nous la noterons $\mathrm{DM}(k)$ et noterons $\mathrm{DM}(k)_{\mathbb{Q}}$ celle qui s'en déduit par tensorisation avec $\mathbb{Q}$. On dispose dans $\mathrm{DM}(k)$ d'objets de Tate $\mathbb{Z}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, dont les images dans $\mathrm{DM}(k)_{\mathbb{Q}}$ seront notées $\mathbb{Q}(n)$. Seule nous importera la sous-catégorie triangulée $\mathrm{DMT}(k)_{\mathbb{Q}}$ de $\mathrm{DM}(k)_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les $\mathbb{Q}(n)$: celle des "extensions itérées" de $\mathbb{Q}(n)[m]$. Rappelons que E est *extension* de B par A s'il existe un triangle distingué $A \to E \to B \to A[1]$.

On dispose dans $\mathrm{DM}(k)$ d'un produit tensoriel associatif et commutatif à unité $\otimes$, compatible à la structure triangulée. L'automorphisme de symétrie de $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ est l'identité (Voevodsky (2000) 2.1.5), $M \mapsto M(1) := M \otimes \mathbb{Z}(1)$ est une équivalence (loc. cit. 4.1.3), et $\mathbb{Z}(n)$ est $\mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Le produit tensoriel $\otimes$ est rigide (loc. cit. 4.3.7): existence pour tout objet M d'un dual M^* muni de ev: $M^* \otimes M \to \mathbb{Z}(0)$ et δ: $\mathbb{Z}(0) \to M \otimes M^*$ tels que les composés $M \to M \otimes M^* \otimes M \to M$ et $M^* \to M^* \otimes M \otimes M^* \to M^*$ soient l'identité.

Rappelons, d'après Levine (1993), comment, lorsque la conjecture d'annulation de Beilinson Soulé (1.1.3) ci-dessous est vérifiée pour k, on peut extraire de $\mathrm{DMT}(k)_{\mathbb{Q}}$ une catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(k)$ qui mérite le nom de catégorie des motifs de Tate mixte sur k.

Ecrivons $\mathrm{Hom}^j(M,N)$ pour $\mathrm{Hom}(M,N[j])$. Les $\mathrm{Hom}^*(\mathbb{Z}(a),\mathbb{Z}(b))$ ne dépendent que de $i = b-a$. Ils sont donnés par les groupes de Chow supérieurs convenablement numérotés de $\mathrm{Spec}(k)$ (loc. cit. 4.2.9 pour $X = \mathrm{Spec}(k)$). Pour $i < 0$ ils sont nuls. Pour $i = 0$,

$$\mathrm{Hom}^j(\mathbb{Z}(0),\mathbb{Z}(0)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Pour $i=1$,

$$\mathrm{Hom}^j(\mathbb{Z}(0),\mathbb{Z}(1)) \quad \begin{array}{ll} = k^* & \text{si } j=1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \tag{1.1.2}$$

Après tensorisation avec $\mathbb{Q}$, ces groupes sont encore données par les sous-espaces propres des opérations d'Adams dans les groupes de K-théorie de k (Levine (1998) II 3.6.6; référence originale: Bloch (1986) complété par Bloch (1994); voir aussi Levine (1994)). La conjecture d'annulation de Beilinson Soulé est que

$$\mathrm{Hom}^j(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(i)) = 0 \quad \text{pour} \quad i>0 \quad \text{et} \quad j \leq 0. \tag{1.1.3}$$

Lorsque (1.1.3) est vrai sur k, Beilinson Bernstein Deligne (1982) 1.3.14, appliqué à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{DMT}(k)_{\mathbb{Q}}$ d'objets les $\mathbb{Q}(n)$, montre que les extensions itérées de $\mathbb{Q}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) forment une catégorie abélienne, coeur d'une t-structure sur $\mathrm{DMT}(k)_{\mathbb{Q}}$. On l'appelle la catégorie $\mathrm{MT}(k)$ des *motifs de Tate mixte* sur k. Elle est stable par produit tensoriel et passage au dual. Ces foncteurs étant exacts, cela résulte de ce que $\mathbb{Q}(n) \otimes \mathbb{Q}(m) = \mathbb{Q}(n+m)$ et que $\mathbb{Q}(n)^* = \mathbb{Q}(-n)$. On obtient ainsi sur $\mathrm{MT}(k)$ un produit tensoriel exact en chaque variable, associatif, commutatif, à unité et rigide.

Pour $\mathcal{A}$ le coeur d'une t-structure sur une catégorie triangulée D, une suite exacte courte $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ dans $\mathcal{A}$ se prolonge uniquement et fonctoriellement en un triangle distingué dans D (loc. cit. 1.1.9 et 1.1.10). Les foncteurs $\mathrm{Hom}^i(A,B)$, pour A et B dans $\mathcal{A}$, forment donc un δ-foncteur, i.e. donnent lieu à des suites exactes longues de cohomologie. Pour A fixe, les $\mathrm{Ext}^i(A,B)$ (Ext de Yoneda) sont un δ-foncteur universel (D. A. Buchsbaum (1960) prop. 4.1, 4.3), d'où des morphismes fonctoriels

$$\mathrm{Ext}^i(A,B) \to \mathrm{Hom}^i(A,B). \tag{1.1.4}$$

Rappelons que

(1.1.5) Le morphisme (1.1.4) est bijectif pour $i \leq 1$, injectif pour $i=2$.

D'après la preuve de Buchsbaum (1960) 4.2, il suffit pour s'en assurer de vérifier que $\mathrm{Hom}^1(A,B)$ est effaçable en B: que pour tout $e \in \mathrm{Hom}^1(A,B)$ il existe $B \hookrightarrow B'$ qui l'annule. Un morphisme $e\colon A \to B[1]$ se prolonge en effet en un triangle distingué $B \to X \to A \to B[1]$, X est dans $\mathcal{A}$, une extension de A par B, et $B \hookrightarrow X$ annule e.

Jusqu' à la fin de 1.4, nous supposons (1.1.3) vrai sur k. La catégorie $\mathrm{MT}(k)$ est donc définie. D'après (1.1.5) et les annulations rappelées avant (1.1.1), on a dans $\mathrm{MT}(k)$.

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m)) = 0 \quad \text{pour} \quad m \leq n. \tag{1.1.6}$$

Pour A dans $\mathrm{MT}(k)$, il résulte de (1.1.6), par induction sur une description de A comme extension itérée, que A admet une unique filtration "par le poids" W, finie, croissante et indexée par les entiers pairs, telle que

$$\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M) := W_{-2n}(M)/W_{-2(n+1)}(M)$$

soit une somme de copies de $\mathbb{Q}(n)$. Posons

$$\omega_n(M) := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(n), \mathrm{Gr}^W_{-2n}(M)).$$

On a donc

$$\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M) = \mathbb{Q}(n) \otimes_{\mathbb{Q}} \omega_n(M).$$

La filtration W est fonctorielle, exacte et compatible au produit tensoriel. Parce que l'automorphisme de symétrie de $\mathbb{Q}(1) \otimes \mathbb{Q}(1)$ est l'identité, on dispose d'isomorphismes $\mathbb{Q}(n) \otimes \mathbb{Q}(m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(n+m)$ compatibles à l'associativité et à la commutativité de $\otimes$. Le foncteur exact $M \mapsto \omega(M) := \oplus \omega_n(M)$ est donc un $\otimes$-foncteur: c'est un foncteur fibre et la catégorie $MT(k)$ est tannakienne.

1.2. Pour M un motif de Tate mixte, le sous-quotient $W_{-2n}(M)/W_{-2(n+2)}(M)$ de M est une extension $M_{n,n+1}$ de $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M) = \mathbb{Q}(n) \otimes \omega_n(M)$ par $\mathrm{Gr}^W_{-2(n+1)}(M) = \mathbb{Q}(n+1) \otimes \omega_{n+1}(M)$. La classe de cette extension est un élément

$$e_n \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+1)) \otimes \mathrm{Hom}(\omega_n(M), \omega_{n+1}(M)).$$

La tensorisation avec $\mathbb{Q}(n)$ est un isomorphisme

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+1)) \tag{1.2.1}$$

et les e_n définissent

$$e_M \colon \omega_*(M) \to \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) \otimes \omega_*(M). \tag{1.2.2}$$

Pour $x \colon \mathbb{Q}(n) \to \text{Gr}^W_{-2n}(M)$ dans $\omega_n(M)$, l'image inverse par x de l'extension $M_{n,n+1}$ est une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\text{Gr}^W_{-2(n+1)}(M) = \mathbb{Q}(n+1) \otimes \omega_{n+1}(M)$, et $e_M(x)$ est la classe de cette extension dans

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) \otimes \omega_{n+1}(M) = \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+1)) \otimes \omega_{n+1}(M).$$

On regardera e_M comme une coaction, au sens des coalgèbres de Lie. Plus précisément, comme une coaction, sur $\omega(M) := \oplus \omega_*(M)$, de la coalgèbre de Lie librement coengendrée par $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1))$.

Proposition 1.3. *La coaction e_M est fonctorielle en M et compatible au produit tensoriel.*

Preuve. La vérification de la fonctorialité en M est laissée au lecteur. Pour $x \in \omega_m(M)$ et $y \in \omega_n(N)$, on doit montrer que

$$e_{M \otimes N}(x \otimes y) = e_M(x) \otimes y + x \otimes e_N(y). \tag{1.3.1}$$

Par fonctorialité, on peut pour le vérifier remplacer M par $W_{-2m}(M)$, une extension de $\mathbb{Q}(m) \otimes \omega_m(M)$ par $W_{-2(m+1)}(M)$, puis par l'image inverse de cette extension par $x \colon \mathbb{Q}(m) \to \mathbb{Q}(m) \otimes \omega_m(M)$. De même pour N, n et y. On se ramène ainsi à supposer que $M = W_{-2m}(M)$, $\omega_m(M) = \mathbb{Q}$, $x = 1$, et de même pour N, n et y. On a alors

$$\begin{aligned}\omega_{m+n+1}(M \otimes N) \xrightarrow{\sim} \omega_{m+n+1}&(M \otimes (\text{quotient } \mathbb{Q}(n) \text{ de } N)) \\ &\oplus \omega_{m+n+1}((\text{quotient } \mathbb{Q}(m) \text{ de } M) \otimes N).\end{aligned}$$

et, par fonctorialité en M et N de $e_{M \otimes N}$, il suffit de vérifier (1.3.1) pour M remplacé par son quotient $\mathbb{Q}(m)$, ainsi que pour N remplacé par son quotient $\mathbb{Q}(n)$. Ces cas se réduisent à la définition de l'isomorphisme (1.2.1).

Si E est une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, il résulte de 1.3 que la classe de l'extension $E^*(1)$ de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$ est l'opposée de la classe de E.

Définition 1.4. *Pour* Γ *un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1))$, $MT(k)_\Gamma$ *est la catégorie des motifs de Tate mixte tels que la coaction (1.2.2) se factorise par une coaction de* Γ.

Pour que M soit dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$, il faut et il suffit que pour tout sous-quotient E de M qui est une extension d'un $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+1)$, la classe de E dans

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+1))$$

soit dans Γ. D'après 1.3, cette sous-catégorie de $MT(k)$, qui contient l'objet unité $\mathbb{Q}(0)$, est stable par sous-quotients, produits tensoriels et duaux. C'est une sous-catégorie tannakienne de $MT(k)$.

1.5. Quel que soit k (de caractérisque 0), on dispose d'un foncteur "réalisation" de $\mathrm{DM}(k)$ dans la catégorie triangulée "systèmes de réalisations" de Huber (1995). L'état de la littérature à ce sujet n'est pas satisfaisant, spécialement en ce qui concerne la réalisation de Hodge. Dans Huber (2000), il est supposé à tort dans la preuve de 2.1.4, p. 775 que les hyperrecouvrements propres de X forment une catégorie filtrante. Cette erreur est corrigée dans un erratum daté d'octobre 2002. Dans Levine (1998) V. 2.3.7 le foncteur Dec de décalage d'une filtration par le poids est appliqué à un complexe de faisceaux, alors qu'il devrait être appliqué après passage à $R\Gamma$. Levine a également rédigé un erratum.

Nous esquissons ci-dessous une façon possible de procéder, adaptée à la définition de Voevodsky de $\mathrm{DM}(k)$, que nous commençons par rappeler. Le foncteur obtenu sera contravariant (cohomologique). Dans la suite de l'article, c'est sa variante covariante (homologique), déduite par passage au dual, qui nous sera utile.

Soit $\mathrm{SmCor}(k)$ la catégorie d'objets les schémas séparés lisses sur k, un morphisme de X dans Y étant une correspondance finie de X vers Y: $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est le groupe abélien librement engendré par les sous-schémas réduits irréductibles fermés Z de $X \times Y$, finis sur X et dominant une composante connexe de X. La catégorie $\mathrm{SmCor}(k)$ est additive (avec $\oplus = \coprod$). La catégorie triangulée $\mathrm{DM}(k)$ se déduit de la catégorie triangulée de complexes bornés $K^b(\mathrm{SmCor}(k))$ par

(a) localisation: on divise par la sous-catégorie épaisse engendrée par les $[X \times A^1] \to [X]$ (invariance d'homotopie) et les $[U \cap V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$ pour X la réunion des ouverts U et V (Mayer-Vietoris);

(b) adjonction de facteurs directs images d'endomorphismes idempotents;

(c) inversion formelle de $\mathbb{Q}(1)$.

Il résulte de Voevodsky (2000) 3.2.6 et de (a), Mayer Vietoris, qu'on obtiendrait une catégorie équivalente si dans $\mathrm{SmCor}(k)$ on se limitait aux schémas lisses et quasi-projectifs sur k. Pour définir le foncteur réalisation, l'essentiel est de définir la réalisation d'un complexe borné X^* d'objets de $\mathrm{SmCor}(k)$, et par la remarque ci-dessus, on peut se ramener au cas où les X^i sont quasi-projectifs.

Lemme 1.5.1. *Soit* $\Gamma\colon X \to Y$ *dans* $\mathrm{SmCor}(k)$. *Si* $\bar{Y}$ *est une compactification projective et lisse de* Y*, il existe une compactification projective et lisse* $\bar{X}$ *de* X *telle que* Γ *se prolonge en* $\bar{\Gamma}\colon \bar{X} \to \bar{Y}$. *Quand elle existe, l'extension* $\bar{\Gamma}$ *est unique.*

Preuve. Il suffit de traiter du cas où X est connexe et où Γ est un sous-schéma fermé Z de $X \times Y$, réduit, irréductible, fini et dominant sur X. Si d est le degré de Z sur X, Z définit un morphisme de schémas z de X dans $\mathrm{Sym}^d(Y)$. D'après Hironaka, il existe une compactification projective et lisse $\bar{X}$ de X telle que z se prolonge en $\bar{z}\colon \bar{X} \to \mathrm{Sym}^d(\bar{Y})$. Pour un tel $\bar{X}$, l'adhérence $\bar{Z}$ de Z dans $\bar{X} \times \bar{Y}$ est encore finie sur $\bar{X}$. Elle fournit le prolongement cherché. L'unicité est claire. Noter que, par Hironaka encore, on peut supposer que X est le complément dans $\bar{X}$ d'un diviseur à croisements normaux.

Pour X^* un complexe borné d'objets de $\mathrm{SmCor}(k)$, on déduit de 1.5.1 l'existence d'un système de compactifications $\bar{X}^n$ des X^n tel que (a) $\bar{X}^n$ est projectif et lisse, et X^n est le complément dans $\bar{X}^n$ d'un diviseur à croisements normaux D^n; (b) la différentielle d se prolonge de X^* à $\bar{X}^*$. Par unicité du prolongement, le prolongement vérifie encore $d^2 = 0$. Les systèmes de compactifications $\bar{X}$ forment une catégorie filtrante. Pour $f\colon X^* \to Y^*$ un morphisme de complexes, et pour $\bar{Y}^*$ une compactification de Y^* vérifiant (a), (b), il existe une compactification $\bar{X}^*$ de X^* vérifiant (a), (b) et telle que f se prolonge en un morphisme de complexes de $\bar{X}^*$ dans $\bar{Y}^*$.

Définissons la réalisation de de Rham de X^* – ingrédient essentiel de la réalisation de Hodge relative à un plongement complexe de k dans $\mathbb{C}$. L'idée est de choisir une compactification $\bar{X}^*$ de X^* comme ci-dessus et de prendre sur chaque $\bar{X}^n$ le complexe de de Rham à pôles logarithmiques $\Omega^*_{\bar{X}^n}(\log D^n)$. Ce complexe est bifiltré: par le filtration de Hodge $F^p = \sigma_{\geq p}$, et par la filtration par le poids W_*, qui compte le nombre de facteurs $\frac{dz_i}{z_i}$ pour z_i une équation locale d'une composante lisse de D^n. Il s'agit ensuite d'obtenir des complexes bifiltrés $(K^{(n)}, W, F)$ représentant les $R\Gamma(\bar{X}^n, \Omega^*(\log D^n))$ et d'utiliser la différentielle de $\bar{X}^*$ pour en faire un complexe double bifiltré, avec $K^{(n)}$ comme colonne de premier indice $-n$. La difficulté sera de déduire de $d^2 = 0$ pour $\bar{X}^*$ que $d'^2 = 0$ identiquement. Ceci fait, il reste à

(i) remplacer la filtration W de $K^{(n)}$ par son translaté W' défini par $W'^m = W^{m-n}$;

(ii) passer au complexe simple associé; on notera que son Gr^W est la somme des $\mathrm{Gr}^W(K^{(n)})[n]$;

(iii) remplacer la filtration W par sa décalée $\mathrm{Dec}\, W$.

Nous travaillerons avec la topologie étale. Celle de Nisnevitch ferait aussi bien l'affaire, mais non celle de Zariski. Pour un faisceau quasi-cohérent, la cohomologie est la même. L'hypercohomologie d'un complexe de de Rham aussi. Gain: pour p: $Z \to X$ un morphisme fini, le foncteur p_* est exact. Ceci est faux pour Zariski. Soit Γ: $X \to Y$ dans $\mathrm{SmCor}(k)$: $\Gamma = \sum n_i Z_i$ et $Z_i \subset X \times Y$ est fini sur X. Soient des compactifications X et Y en $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, avec à l'infini un diviseur à croisement normaux, et supposons que Γ se prolonge en $\bar{\Gamma}$, i.e. que chaque adhérence $\bar{Z}_i$ de Z_i dans $\bar{X} \times \bar{Y}$ soit finie sur $\bar{X}$. Soit enfin $|\bar{\Gamma}|$ le support $\cup \bar{Z}_i$ de $\bar{\Gamma}$. La correspondance $\bar{\Gamma}$ définit alors un morphisme de complexes de faisceaux sur $|\Gamma|$

$$[\bar{\Gamma}]\colon \mathrm{pr}_2^* \Omega^*(\log) \to \mathrm{pr}_1^* \Omega^*(\log).$$

Ici aussi que la topologie soit étale ou de Nisnevitch est essentiel. Prendre garde que pr_2^* est une image inverse au sens des faisceaux, et non pas au sens des faisceaux cohérents (pour laquelle l'image inverse de la différentielle de de Rham d ne serait pas définie). Ce morphisme s'étend aux résolutions flasques canoniques $\mathcal{C}^*$ et il suffit de représenter $R\Gamma(\bar{X}^n, \Omega^*(\log))$ par $\Gamma(\bar{X}^n, \mathcal{C}^*\Omega^*(\log))$.

Pour la cohomologie usuelle, sur $\mathbb{C}$, et pour la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell^n$, les résolutions flasques canoniques sont fonctorielles sur SmCor, et peuvent être utilisées pour obtenir les résolutions de Betti et ℓ-adiques.

1.6. En caractéristique zéro, les seuls corps pour lesquels la conjecture d'annulation de Beilinson Soulé soit démontrée sont les corps de nombres (= extensions finies de $\mathbb{Q}$), les corps de fonctions rationnelles d'une courbe de genre 0 sur un corps de nombres, et les limites inductives de tels corps.

Le cas qui nous importe est celui d'un corps de nombres k. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de k. La source du contrôle qu'on a sur $K_*(k)$ est la détermination par Borel (1974) de $H^i(\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{R})$ pour n assez grand ($n \geq 4i+5$ suffit). Pour les mêmes n, cette détermination implique que $H^i(\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{R})$, et donc $H^i(\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{Q})$, est indépendant de n: les morphismes de restriction $H^i(\mathrm{GL}(n_1,\mathcal{O}),\mathbb{Q}) \to H^i(\mathrm{GL}(n_2,\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ sont des isomorphismes pour $n_1 \geq n_2 \geq 4i+5$. Ceci permet de définir $H^i(\mathrm{GL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ comme étant $H^i(\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ pour n assez grand. Le rapport avec la K-théorie est le suivant: $H^i(\mathrm{GL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q})$ est une algèbre de Hopf, le coproduit étant défini par les $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O})\times\mathrm{GL}(m,\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}(n+m,\mathcal{O})$; pour le cup-produit, c'est donc une algèbre graduée commutative libre; soit $PH^* := H^{*>0}/H^{*>0}.H^{*>0}$ son quotient indécomposable, de dual PH_* l'espace des éléments primitifs en homologie; avec ces notations, on a en degré >0,

$$K_*(\mathcal{O})\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} PH_*(\mathrm{GL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q}). \tag{1.6.1}$$

Voir loc. cit. §12.

Il est un peu plus commode de travailler avec SL qu'avec GL. Borel ramène l'un à l'autre en montrant que stablement, i.e. pour n assez grand rel. i, $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O})$ et $\mathrm{SL}(n,\mathcal{O})\times\mathcal{O}^*$ ont même cohomologie rationnelle, de sorte que

$$PH_*(\mathrm{GL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q}) = PH_*(\mathrm{SL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q}) \oplus \mathcal{O}^*\otimes\mathbb{Q}[1]. \tag{1.6.2}$$

Les résultats de Borel, rappelés ci-dessous, donnent notamment le rang de $PH_i(\mathrm{SL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q})$, en particulier sa nullité pour i pair ou égal à 1. Les suites exactes reliant K-théorie de k, de $\mathcal{O}$ et des corps résiduels donnent alors que

$$(1.6.3) \qquad K_1(\mathcal{O})\otimes\mathbb{Q} = \mathcal{O}^*\otimes\mathbb{Q} \subset K_1(k)\otimes\mathbb{Q} = k^*\otimes\mathbb{Q} \qquad \text{et}$$

$$K_i(\mathcal{O})\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} K_i(k)\otimes\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} PH_i(\mathrm{SL}(\mathcal{O}),\mathbb{Q}) \qquad \text{pour } i>1.$$

Soit $G := R_{k/\mathbb{Q}}\mathrm{SL}(n)$. C'est le groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ évident tel que $G(\mathbb{Q}) = \mathrm{SL}(n,k)$. Soient K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$ et X l'espace riemannien symétrique $G(\mathbb{R})/K$. L'action de $\mathrm{SL}(n,\mathcal{O})$ sur l'espace contractible X est presque libre: elle est propre à stabilisateurs finis. On a donc

$$H^i(\mathrm{SL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{Q}) = H^i(\mathrm{BSL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{Q}) = H^i(X/\mathrm{SL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{Q}).$$

Le résultat de Borel est que la cohomologie réelle, qui est donnée par le complexe des formes différentielles sur X $\mathrm{SL}(n,\mathcal{O})$-invariantes, est déjà donnée, pour $n\geq 4i+5$, par le sous-complexe des formes $G(\mathbb{R})$-invariantes.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. C'est $\mathfrak{sl}(n,k)$, vu comme $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie. Si $k\otimes\mathbb{R} = \prod k_v$, les k_v étant isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ est la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie produit des $\mathfrak{g}_v := \mathfrak{sl}(n,k_v)$. Soit $\mathfrak{k}$ la sous-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(K)$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$. C'est le produit de sous-algèbres $\mathfrak{k}_v$ des $\mathfrak{g}_v$. Le complexe des formes $G(\mathbb{R})$-invariantes sur X est le complexe $C^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{k})$ des *cochaînes relatives*, de composantes les $(\overset{i}{\wedge}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{k}))^{\mathfrak{k}}$, et de cohomologie la *cohomologie relative* $H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{k})$. On a donc

$$(1.6.4) \qquad H^i(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{k}) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathrm{SL}(n,\mathcal{O}),\mathbb{R})$$

pour $n\geq 4i+5$. La cohomologie relative $H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\mathfrak{k})$ est le produit tensoriel des $H^*(\mathfrak{g}_v,\mathfrak{k}_v)$, qui sont connus. Tant pour $\mathfrak{g}_v$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ et n impair que pour $\mathfrak{g}_v$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, l'espace $PH^*(\mathfrak{g}_v)$ des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf $H^*(\mathfrak{g}_v)$, s'envoie *sur* $PH^*(\mathfrak{k}_v)$, et on peut en déduire que le morphisme $H^*(\mathfrak{g}_v,\mathfrak{k}_v)\to H^*(\mathfrak{g}_v) = \overset{*}{\wedge} PH^*(\mathfrak{g}_v)$ est injectif, d'image la sous-algèbre $\overset{*}{\wedge}\mathrm{Ker}(PH^*(\mathfrak{g}_v)\to PH^*(\mathfrak{k}_v))$. Noter que $PH^*(\mathfrak{g}_v)$ s'envoie isomorphiquement sur le quotient indécomposable de $H^*(\mathfrak{g}_v)$, et de même pour $\mathfrak{k}_v$. Par Künneth, les mêmes énoncés valent pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, du moins pour n impair ou stablement, pour $n\to\infty$. Dualisant, dans le cas stable $n\to\infty$ on a donc en degré >1

$$(1.6.5) \qquad K_*(\mathcal{O})\otimes\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(PH_*(\mathfrak{k})\to PH_*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})).$$

Si on travaille avec GL plutôt que SL, le morphisme (1.6.5) est encore défini en degré 1, où le conoyau à droite est le quotient de $k \otimes \mathbb{R} = \prod k_v$ par le produit des sous-groupes $i\mathbb{R}$ de ceux des k_v qui sont isomorphes à $\mathbb{C}$, et où (1.6.5) est l'application régulateur usuelle.

Puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est déduite de $\mathfrak{g}$ par extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, $H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, $PH^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ et $PH(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ ont une $\mathbb{Q}$-structure naturelle. L'image de $PH_*(\mathfrak{k})$ dans $PH_*(g_{\mathbb{R}})$ ne dépend pas du choix de K (car deux choix sont conjugués), mais elle n'est en général pas définie sur $\mathbb{Q}$ (exception: k totalement réel ou CM, auquel cas la classe de conjugaison de $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est définie sur $\mathbb{Q}$). On peut vérifier sur les tables qu'elle admet la description suivante en termes de l'algèbre de cohomologie de de Rham $H^*_{\mathrm{DR}}(G)$ de G, de l'algèbre de cohomologie rationnelle $H_B(G)$ de $G(\mathbb{C})$, de l'involution F_∞ de $H_B(G)$ induite par la conjugaison complexe de $G(\mathbb{C})$ et de l'isomorphisme de comparaison $H_{\mathrm{DR}}(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = H_B(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Rappelons que $H^*(\mathfrak{g})$, cohomologie du complexe des formes différentielles invariantes sur G, s'envoie isomorphiquement sur $H_{\mathrm{DR}}(G)$. Rappelons aussi que pour toute variété algébrique X sur $\mathbb{R}$, l'involution "conjugaison complexe" de $H_{\mathrm{DR}}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ s'identifie par l'isomorphisme de comparaison à l'involution $F_\infty \circ$(conjugaison complexe) de $H_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. En particulier, $H_B(X)^{F_\infty} \subset H_{\mathrm{DR}}(X)$. On a

$$\mathrm{Im}(PH_*(\mathfrak{k}) \to PH_*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})) = PH_{*B}(G)^{F_\infty} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \tag{1.6.6}$$

ou plutôt son image par l'isomorphisme de comparaison dans $PH_{*\mathrm{DR}}(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = PH_*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$. L'inclusion $\subset$ est claire à priori: $PH_*(\mathfrak{k})$ est la cohomologie de de Rham de K, groupe algébrique sur $\mathbb{R}$ et sur la cohomologie de Betti de K l'involution F_∞ est l'identité, car $K(\mathbb{C})$ et $K = K(\mathbb{R})$ ont même cohomologie singulière. L'égalité (1.6.6) peut se récrire

$$\mathrm{coker}(PH_*(\mathfrak{k}) \to PH_*(\mathfrak{g})) = (PH_{*\mathrm{DR}}(G) \otimes \mathbb{C}/PH_{*B}(G) \otimes \mathbb{R})^\sigma \tag{1.6.7}$$

pour σ la conjugaison complexe de $PH_{*\mathrm{DR}}(G) \otimes \mathbb{C}$.

La construction PH^* transforme produit de groupes en somme directe. Il en résulte que pour chacune des théories de cohomologie habituelles, on a

$$PH^*(G) = H^0(\mathrm{Spec}(k)) \otimes PH^*(\mathrm{SL}(n)/\mathbb{Q}). \tag{1.6.8}$$

Pour SL(n) sur $\mathbb{Q}$, PH^* est, dans chaque théorie de cohomologie, la somme des $\mathbb{Q}(-j)$ en degré $2j-1$ $(2 \le j \le n)$ avec, en particulier, un Frobenius réel $F_\infty = (-1)^j$. En cohomologie de de Rham, cela donne $PH^*(\mathfrak{g}) = PH^*_{\mathrm{DR}}(G)$ réduit à k en degrée $2j-1$ $(2 \le j \le n)$, k étant vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Si on tensorise avec $\mathbb{C}$, k devient $\mathbb{C}^S$, pour S l'ensemble des plongements complexes de k. En cohomologie de Betti

$$PH^{2j-1}_B(G) = ((2\pi i)^{-j}\mathbb{Q})^S \subset \mathbb{C}^S = PH^{2j-1}_{\mathrm{DR}}(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

et F_∞ est $(-1)^j$ fois l'action de la conjugaison complexe sur S. Par (1.6.8), on a stablement

$$\text{coker}(PH_{2j-1}(\mathfrak{k}) \to PH_{2j-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})) = \left[(\mathbb{C}/(2\pi i)^j\mathbb{R})^S\right]^\sigma, \tag{1.6.9}$$

σ agissant par conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$ et sur S. L'application

$$K_{2j-1}(k) \otimes \mathbb{Q} \to K_{2j-1}(k) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \left[(\mathbb{C}/(2\pi i)^j\mathbb{R})^S\right]^\sigma \tag{1.6.10}$$

déduite de (1.6.5) et (1.6.9) est *l'application régulateur* de Borel.

Beilinson a défini une application régulateur plus précise, à valeurs dans $\left[(\mathbb{C}/(2\pi i)^j\mathbb{Q})^S\right]^\sigma$. Pour $j > 0$, le groupe $\mathbb{C}/(2\pi i)^j\mathbb{Q}$ est le groupe $H^1_{\mathcal{D}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(j))$ des extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(j)$ dans la catégorie des structures de Hodge mixte. Pour $v \in S$ un plongement complexe de k, la composante d'indice v du régulateur de Beilinson est le composé du morphisme de $K_{2j-1}(k)$ dans $K_{2j-1}(\mathbb{C})$ défini par v, et de la classe de Chern ch_j, à valeurs dans $H^1_{\mathcal{D}}(\mathbb{Q}(j))$. Que l'on obtienne ainsi une classe dans $\left[(\mathbb{C}/(2\pi i)^j\mathbb{Q})^S\right]^\sigma$ exprime une fonctorialité par conjugaison complexe. Que ce régulateur redonne celui de Borel – du moins à un facteur rationnel près – est dans Beilinson (1984), amplifié par Rapoport (1988). Il s'ensuit que le régulateur de Beilinson est injectif. Un corollaire, noté par Rapoport loc. cit (fin de l'introduction) et basé sur une compatibilité entre ch_j et opérations d'Adams (Schneider (1988)) est que l'opération d'Adams ψ_a agit sur $K_{2j-1}(k)\otimes\mathbb{Q}$ par multiplication par a^j.

Dans DMT(k), on a donc $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(0)) = \mathbb{Q}$, $\mathrm{Hom}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q}$ pour $n \ge 1$, et les autres $\mathrm{Hom}^j(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$ sont nuls. En particulier, la conjecture d'annulation de Beilinson Soulé est vérifiée et, d'après (1.1.5), on a dans $\mathrm{MT}(k)$

(1.6.11) $$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = K_{2n-1}(k) \otimes \mathbb{Q} \quad \text{et}$$

(1.6.12.) $$\mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0$$

Soit k un corps de nombres. Le foncteur "réalisation" sur $\mathrm{DM}(k)$ induit sur $\mathrm{MT}(k)$ un $\otimes$-foncteur à valeurs dans les systèmes de réalisations au sens de Deligne (1989) (aspect cristallin exclus) ou Jannsen (1990). Il est sûrement vrai que le régulateur de Beilinson est déduit de (1.6.11) et du foncteur réalisation qui, à une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ et à un plongement complexe de k attache une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ dans la catégorie des structures de Hodge mixte. Pour notre usage, l'essentiel est que le régulateur de Beilinson attache à une classe de K-théorie la classe de la réalisation de Hodge d'une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ dans $MT(k)$. Ceci résulte de sa construction, et de ce que $\mathrm{GL}(n)$ soit de Tate mixte, de par sa décomposition de Bruhat.

1.7. Rappelons que $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1)) = k^* \otimes \mathbb{Q}$. Si S est un ensemble de places finies de k, et que $\mathcal{O}_S$ est l'ensemble des S-entiers de k (intégralité en dehors de S), nous définissons artificiellement la catégorie $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$ des motifs de Tate mixte sur $\mathcal{O}_S$ comme étant $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ pour $\Gamma = \mathcal{O}_S^* \otimes \mathbb{Q} \subset k^* \otimes \mathbb{Q}^*$. Cas particulier: pour S le complément d'une place finie v, $\mathcal{O}_S$ est le localisé $\mathcal{O}_{(v)}$ en v de l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ de k, et on parle de motifs de Tate mixte *non ramifiés* en v. Un motif de Tate mixte sur $\mathcal{O}_S$ est donc un motif de Tate mixte sur k non ramifié en chaque place finie $v \notin S$.

Proposition 1.8. *Soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de v. Pour qu'un motif de Tate mixte M sur k soit non ramifié en v, il faut et il suffit que sa réalisation ℓ-adique M_ℓ soit non ramifiée en v.*

Preuve. La réalisation ℓ-adique est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel dépendant fonctoriellement du choix d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. La fonctorialité en $\bar{k}$ en fait une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Nous utiliserons que

(a) la réalisation ℓ-adique de $\mathbb{Q}(1)$ est $\mathbb{Q}_\ell(1) := \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, avec $\mathbb{Z}_\ell(1) = \lim \mu_{\ell^n}(\bar{k})$;

(b) Pour $n \neq m$, puisque $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m)) = 0$, une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(m)$ est déterminée à isomorphisme unique près par sa classe dans $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m))$. Pour $x \in k^* \subset \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1))$, notons $K(x)$ l'extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, dite de Kummer, de classe x. Sa réalisation ℓ-adique est déduite, par tensorisation avec $\mathbb{Q}_\ell$, de l'extension de Kummer $K_\ell(x)$ de $\mathbb{Z}_\ell$ par $\mathbb{Z}_\ell(1)$. La donnée d'une extension

$$0 \to \mathbb{Z}_\ell(1) \to E \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_\ell \to 0$$

de $\mathbb{Z}_\ell$ par $\mathbb{Z}_\ell(1)$ équivaut à celle du $\mathbb{Z}_\ell(1)$-torseur $f^{-1}(1)$, et $K_\ell(x)$ correspond au $\mathbb{Z}_\ell(1)$ torseur limite projective des $\mu_{\ell^n}(\bar{k})$-torseurs des racines $(\ell^n)^{\text{ièmes}}$ de x dans $\bar{k}$.

La représentation ℓ-adique $K_\ell(x)$ est non ramifiée en v si et seulement si x est une unité en v, i.e. est dans $\mathcal{O}^*_{(v)}$. Pour M de Tate mixte, il résulte donc de (b) que M est dans $MT(\mathcal{O}_v)$ si et seulement si les représentations ℓ-adiques $W_{-2n}(M_\ell)/W_{-2(n+2)}(M_\ell)$ sont non ramifiées. Il reste à vérifier le lemme suivant.

Lemme 1.8.1. *Soient K_v le corps des fractions de l'hensélisé $\mathcal{O}^h_{(v)}$ de $\mathcal{O}_v$ et H une représentation ℓ-adique de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, munie d'une filtration finie croissante indexée par les entiers pairs W, telle que $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(H)$ soit somme de copies de $\mathbb{Q}_\ell(n)$. Pour que la représentation H soit non ramifiée, il suffit que les représentations $W_{-2n}/W_{-2(n+2)}$ le soient.*

Preuve. Soit $I_v \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ le groupe d'inertie. On sait que son plus grand pro-ℓ-quotient est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell(1)$. Soit $t_\ell \colon I_v \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ le morphisme de passage au quotient. Il est $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$-équivariant.

Supposons que I_v agisse trivialement sur les $W_{-2n}/W_{-2(n+2)}$ et prouvons par récurrence sur $r \geq 2$ qu'il agit trivialement sur les $W_{-2n}/W_{-2(n+r)}$. Pour $r = 2$, c'est l'hypothèse. Pour $r > 2$, l'hypothèse de récurrence assure que l'action de I_v est triviale sur $W_{-2n}/W_{-2(n+r-1)}$ et sur $W_{-2(n+1)}/W_{-2(n+r)}$. L'action de $\sigma \in I_v$ est donc de la forme $1 + \nu(\sigma)$, avec pour $\nu(\sigma)$ un composé

$$W_{-2n}/W_{-2(n+r)} \to \mathrm{Gr}^W_{-2n} \xrightarrow{n(\sigma)} \mathrm{Gr}^W_{-2(n+r-1)} \to W_{-2n}/W_{-2(n+r)},$$

et $n(\sigma_1\sigma_2) = n(\sigma_1) + n(\sigma_2)$. L'application $\sigma \mapsto n(\sigma)$ se factorise donc par $\mathbb{Z}_\ell(1)$, et est de la forme

$$n(\sigma) = n \cdot t_\ell(\sigma), \text{ pour } n\colon \mathrm{Gr}^W_{-2n}(1) \to \mathrm{Gr}^W_{-2(n+r-1)}.$$

Le morphisme n est $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$-equivariant. Puisque $r > 2$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)}(\mathbb{Q}_\ell(n+1\ ),$ $\mathbb{Q}_\ell(n+r-1)) = 0$ et n est nul, ce qui conclut la récurrence.

Proposition 1.9. *Soit* Γ *un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(1))$.

(i) *Pour* $r \geq 2$, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+r))$ *est le même dans* $MT(k)$ *et dans* $MT(k)_\Gamma$.
(ii) *Les* Ext^2 *de Yoneda sont nuls dans* $MT(k)_\Gamma$.

Preuve. (i) Si $r \geq 2$, une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+r)$ est en effet automatiquement dans $MT(k)_\Gamma$.
(ii) Il suffit de vérifier la nullité des $\mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m))$. Pour toute classe c dans cet Ext^2, il existe dans $MT(k)_\Gamma$ une extension

$$0 \to F \to E_1 \to \mathbb{Q}(n) \to 0, \tag{1.9.1}$$

de classe notée c_1, et une extension E_2 de F par $\mathbb{Q}(m)$, de classe c_2, telle que c soit le produit de Yoneda c_2c_1. Ce produit est l'image de c_2 par le cobord

$$\partial\colon \mathrm{Ext}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(m))$$

défini par (1.8.1). C'est aussi l'obstruction à l'existence dans $MT(k)_\Gamma$ de $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 = 0$ de quotients successifs X_i/X_{i+1} $(i = 0, 1, 2)$ munis d'isomorphismes avec $\mathbb{Q}(n)$, F et $\mathbb{Q}(m)$, tel que la classe de l'extension X/X_2 de $\mathbb{Q}(n)$ par F soit c_1, et que la classe de l'extension X_1 de F par $\mathbb{Q}(m)$ soit c_2.

Relevons $\mathbb{Q}(n)$ dans $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(E_1)$ et soit E'_1 l'image inverse dans $W_{-2n}(E_1)$ de ce relèvement. C'est une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $F' := F \cap E'_1 = W_{-2(n+1)}(F)$. Si E'_2 est l'image inverse de F' dans E_2, c est encore le produit de Yoneda $c'_2c'_1$ de la classe c'_1 de E'_1 par la classe c'_2 de E'_2. On a gagné que $F' = W_{-2(n+1)}(F')$. Un argument dual permet ensuite de se ramener au cas où $F = W_{-2(n+1)}(F)$ et $W_{-2m}(F) = 0$. Le Ext^2 ne peut donc être non nul que si $m \geq n+2$. Puisque le Ext^2 est nul dans $MT(k)$, il existe dans $MT(k)$ une extension itérée $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 = 0$ du type considéré plus haut, le sous-quotient $W_{-2a}/W_{-2(a+2)}$ de X coïncide avec le même sous-quotient de X_0/X_3 si $a+2 \leq m$, et avec le même sous-quotient de X_1 si $a > n$. Si, comme on peut le supposer, $m \geq n+2$, on est pour tout a dans un de ces deux cas, X est donc dans $MT(k)_\Gamma$, et $c = 0$.

2. Le point de vue tannakien.

2.1. Soient k un corps de nombres et $\Gamma \subset k^* \otimes \mathbb{Q}$ un sous-espace de dimension finie. Le foncteur ω, déduit du foncteur gradué ω_* de 1.1 par oubli de la graduation, est un foncteur fibre de la catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ définie en 1.4: si G_ω est le schéma en groupe des automorphismes du $\otimes$-foncteur ω, le foncteur ω induit une équivalence de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ avec la catégorie des représentations (linéaires, de dimension finie) de G_ω.

L'action de G_ω sur $\omega(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}$ définit un morphisme

$$G_\omega \to \mathbb{G}_m. \tag{2.1.1}$$

Soit U_ω son noyau. Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ agit sur le $\otimes$-foncteur ω, $\lambda \in \mathbb{G}_m$ agissant sur ω_n par multiplication par λ^n. Cette action est une section $\mathbb{G}_m \to G_\omega$ de (2.1.1). Elle fait de G_ω un produit semi-direct

$$G_\omega = \mathbb{G}_m \ltimes U_\omega. \tag{2.1.2}$$

Si cela est nécessaire pour éviter une ambiguïté, on écrira $G_\omega \langle \mathrm{MT}(k)_\Gamma \rangle$ et $U_\omega \langle \mathrm{MT}(k)_\Gamma \rangle$ au lieu de G_ω et U_ω. Pour S un ensemble fini de place finie de k et $\Gamma = \mathcal{O}_S^* \otimes \mathbb{Q}$, on écrira aussi $\ldots\ \langle \mathrm{MT}(\mathcal{O}_S) \rangle$ (cf. 1.7).

L'action de G_ω est fonctorielle en M. Pour tout M dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$, elle respecte donc la filtration par le poids, indexée par les entiers pairs, de $\omega(M)$ par les

$$\omega(W_{-2n}M) = \bigoplus_{m \geq n} \omega_m(M).$$

Le sous-groupe U_ω agit trivialement sur $\omega(\mathbb{Q}(1))$, donc sur les $\omega(\mathbb{Q}(n))$, ainsi que sur $\mathrm{Gr}^W(\omega(M)) = \omega(\mathrm{Gr}^W(M))$. Il en résulte que le sous-groupe algébrique $U_\omega \langle M \rangle$ de $\mathrm{GL}(\omega(M))$ image de U_ω est unipotent. L'action de $\mathbb{G}_m \subset G_\omega$ sur $\omega(M)$ normalise cette image. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\omega \langle M \rangle$ de $U_\omega \langle M \rangle$ est donc une sous-algèbre de Lie graduée de $\mathfrak{gl}(\omega(M))$. Puisque l'action de $U_\omega \langle M \rangle$ sur $\omega(M)$ respecte la filtration par le poids et est l'identité sur le gradué associé, l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\omega \langle M \rangle$ est à degrés > 0.

Pour M un motif de Tate mixte, notons $\langle M \rangle$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ *engendrée* par M, d'objets les sous-quotients de sommes de $M^{\otimes p} \otimes (M^\vee)^{\otimes q}$. Si M' est dans $\langle M\rangle$, $U_\omega\langle M'\rangle$ est un quotient de $U_\omega\langle M\rangle$, et le schéma en groupe U_ω est la limite projective des $U_\omega\langle M\rangle$ pour $\langle M\rangle$ de plus en plus grand. Le schéma en groupe U_ω est donc pro-unipotent.

Les algèbres de Lie $\mathfrak{u}_\omega\langle M\rangle$ sont à degré >0 et, par (1.6.11) et 1.9, les groupes

$$\text{(2.1.3)}\qquad \operatorname{Ext}^1(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(n)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\le 0,\\ \Gamma & \text{si } n=1,\\ K_{2n-1}(k)\otimes\mathbb{Q} & \text{si } n\ge 2. \end{cases}$$

sont de dimension finie. On est donc dans la situation considérée en A.14. En chaque degré n, le système projectif des $(\mathfrak{u}_\omega\langle M\rangle)_n$ est stationnaire et on définit l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Lie}_{\mathrm{gr}}(U_\omega)$, encore notée $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}}$, comme étant la somme sur n des $\lim(\mathfrak{u}_\omega\langle M\rangle)_n$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\omega$ de U_ω est la limite projective des $\mathfrak{u}_\omega\langle M\rangle$; c'est le produit des $(\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}})_n$. Appliquant A.15, on obtient:

Proposition 2.2. *(i) L'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}}$ est à degrés >0 et est en chaque degré de dimension finie. Elle détermine U_ω par*

$$U_\omega = \lim \exp(\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}}/\textit{partie de degré } \ge N).$$

(ii) Le foncteur ω induit une équivalence de $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$ avec la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie gradués, munis d'une action de $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}}$ compatible aux graduations.

Que les $\operatorname{Ext}^2(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(n))$ soient nuls admet la traduction suivante.

Proposition 2.3. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}}$ est libre.*

On en obtient un système générateur homogène libre en relevant une base de chaque

$$\text{(2.3.1)}\qquad (\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}})_n^{\mathrm{ab}} = \text{ dual de (2.1.3)}$$

dans $(\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}})_n$.

2.4 Mise en garde. On ne dispose pas d'un relèvement canonique de $(\mathfrak{u}^{\mathrm{gr}}_\omega)^{\mathrm{ab}}_n$ dans $(\mathfrak{u}^{\mathrm{gr}}_\omega)_n$. On ne dispose donc pas d'un isomorphisme canonique de $\mathfrak{u}^{\mathrm{gr}}_\omega$ avec l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel gradué

$$(\mathfrak{u}^{\mathrm{gr}}_\omega)^{\mathrm{ab}} = \oplus(\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(n))^\vee \text{ en degré } n). \tag{2.4.2}$$

2.5. La catégorie tannakienne $\mathrm{MT}(k)$ est la réunion filtrante des sous-catégories pleines $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$, pour S de plus en plus grand. On a donc pour $\mathrm{MT}(k)$

$$\begin{aligned} G_\omega \langle \mathrm{MT}(k)\rangle := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) = \lim G_\omega \langle \mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)\rangle = \\ = \mathbb{G}_m \ltimes \lim U_\omega \langle \mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)\rangle \,. \end{aligned}$$

2.6. Rappelons quelques définitions fondant la géométrie algébrique dans une catégorie tannakienne $\mathcal{T}$.

La catégorie $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$ des Ind-objets de $\mathcal{T}$ est munie d'un produit tensoriel associatif commutatif à unité hérité de $\mathcal{T}$. Ceci permet de définir la notion d'algèbre commutative à unité de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$: c'est un objet A muni d'un produit $A\otimes A\to A$ et d'une unité $1\to A$ vérifiant les axiomes usuels. On définit la catégorie des $\mathcal{T}$-*schémas affines*, aussi appelés schémas affines en $\mathcal{T}$, comme étant la duale de celle des algèbres commutatives à unité de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$. On note $\mathrm{Spec}(A)$ le $\mathcal{T}$-schéma affine correspondant à l'algèbre A, et on appelle A son *algèbre affine.*

Un $\mathcal{T}$-*schéma en groupe affine* est un objet en groupe de la catégorie des $\mathcal{T}$-schémas affines, i.e. le spectre $G=\mathrm{Spec}(A)$ d'une algèbre de Hopf commutative A de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{T}$. Une action de G sur un objet M de $\mathcal{T}$ est une structure de comodule $M\to A\otimes M$.

Pour M un object de $\mathcal{T}$, on notera encore M le $\mathcal{T}$-*schéma vectoriel* $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^*M^\vee)$, où $\mathrm{Sym}^*N := \mathrm{colim}_A \bigoplus_{n\le A} \mathrm{Sym}^n(N)$. Un pro-objet $\lim M_i$ de $\mathcal{T}$ définit de même le $\mathcal{T}$-*schéma provectoriel* $\mathrm{Spec}(\mathrm{colim}_{i,A} \bigoplus_{n\le A} \mathrm{Sym}^n(M_i^\vee))$.

Pour un exposé plus détaillé, nous renvoyons à Deligne (1989) §5. Par loc. cit. 5.8, de nombreux énoncés connus en géométrie algébrique restent valables en $\mathcal{T}$-géométrie algébrique. Nous les utiliserons librement.

2.7. Rappelons (Deligne (1990)) qu'on dispose, dans toute catégorie tannakienne $\mathcal{T}$, d'un $\mathcal{T}$-schéma en groupe affine canonique, le *groupe fondamental* $\pi(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$. Il agit sur tout objet M de $\mathcal{T}$, cette action est fonctorielle en M, et pour tout foncteur fibre F elle définit un isomorphisme

$$F(\pi(\mathcal{T})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}^{\otimes}(F). \tag{2.7.1}$$

2.8. Certaines des constructions 2.1–2.5 sont motiviques, i.e. l'image par ω de constructions dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$. D'autres dépendent de ce que le foncteur fibre ω est gradué.

Notons G le groupe fondamental $\pi(\mathrm{MT}(k)_\Gamma)$. Les constructions suivantes sont motiviques:

(a) le morphisme (2.1.1) de G_ω dans $\mathbb{G}_m$. C'est l'image par ω du morphisme

$$G \to \mathbb{G}_m \tag{2.8.1}$$

donnant l'action du groupe fondamental G de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ sur $\mathbb{Q}(1)$. Pour donner un sens à (2.8.1), observer que la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie est une sous-catégorie de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$, par $V \mapsto V \otimes \mathbb{Q}(0)$, et qu'un schéma en groupe affine peut donc être considéré comme un schéma en groupe de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$.

(b) le groupe U_ω est motivique: c'est l'image par ω du noyau U de (2.8.1). De même pour sa pro-algèbre de Lie $\mathfrak{u}$

(c) la formule (2.4.2) se relève en un isomorphisme de pro-objets de $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$

$$\mathrm{Lie}(U^{\mathrm{ab}}) = \prod_n \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))^\vee \otimes \mathbb{Q}(n). \tag{2.8.2}$$

Dans (2.8.2), la projection sur le $n^{\text{ième}}$ facteur donne l'action de $\mathrm{Lie}\, U$ sur les extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$.

Par contre, la structure de produit semi-direct (2.1.2) et la graduation de $\mathfrak{u}_\omega$ (i.e., la décomposition de ce provectoriel en produit des $(\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{gr}})_n$) ne sont pas motiviques. La graduation de $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}}$ l'est, image de (2.8.2) par ω, car l'action intérieure de G sur $\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}}$ se factorise par le quotient $\mathbb{G}_m$ de G.

2.9. La réalisation de de Rham M_{DR} de M dans $\mathrm{MT}(k)$ est un k-espace vectoriel, muni d'une filtration par le poids W image de celle de M, et d'une filtration décroissante F, la filtration de Hodge. Ces filtrations sont fonctorielles en M, exactes et compatibles au produit tensoriel.

On a

$$\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{DR}} = k \text{ en poids } -2 \text{ et filtration de Hodge } -1,$$

et $\mathbb{Q}(n)_{\mathrm{DR}}$ est donc k en poids $-2n$ et filtration de Hodge $-n$. Pour M quelconque, les filtrations W et F sont donc opposées, et définissent une graduation de M_{DR} telle que

$$\begin{aligned} W_{-2n}(M_{\mathrm{DR}}) &= \bigoplus_{m \geq n} (M_{\mathrm{DR}})_m \\ F^{-n}(M_{\mathrm{DR}}) &= \bigoplus_{m \leq n} (M_{\mathrm{DR}})_m. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} (M_{\mathrm{DR}})_n &= \mathrm{Gr}^W_{-2n}(M_{\mathrm{DR}}) = (\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M))_{\mathrm{DR}} \\ &= (\omega_n(M) \otimes \mathbb{Q}(n))_{\mathrm{DR}} = \omega_n(M) \otimes k. \end{aligned}$$

On en déduit la

Proposition 2.10. *Le foncteur fibre* DR *sur* $\mathrm{MT}(k)$ *est canoniquement isomorphe au foncteur déduit du foncteur fibre* ω *par extension des scalaires de* $\mathbb{Q}$ *à* k.

2.11. Pour C une clôture algébrique de $\mathbb{R}$ et σ un plongement de k dans C, à la théorie de cohomologie

$$X \text{ sur } k \longmapsto H^* \text{ (espace topologique } X(C), \mathbb{Q})$$

correspond un foncteur fibre $M \mapsto M_\sigma$, fonctoriel en C. Parler de “plongement dans C” plutôt que de plongement complexe (i.e. dans $\mathbb{C}$) a l'avantage que la fonctorialité en C fournit un isomorphisme $M_\sigma \to M_{\bar{\sigma}}$. Pour un plongement réel, i.e. pour $\sigma = \bar{\sigma}$, cet isomorphisme est une involution de M_σ, le *Frobenius réel.*

Un isomorphisme de comparaison canonique d'un foncteur fibre α vers un foncteur fibre β sera noté $\mathrm{comp}_{\beta,\alpha}$, et son inverse $\mathrm{comp}_{\alpha,\beta}$. La relation entre la cohomologie de de

Rham et la cohomologie singulière fournit

$$\text{comp}_{\sigma,\text{DR}}\colon\ M_{\text{DR}} \otimes_{k,\sigma} C \xrightarrow{\sim} M_\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} C, \tag{2.11.1}$$

fonctoriel en C. Il induit

$$\text{comp}_{\sigma,\omega}\colon\ M_\omega \otimes C \xrightarrow{\sim} M_\sigma \otimes C \tag{2.11.2}$$

et permet de voir M_σ comme une $\mathbb{Q}$-structure sur $M_{\text{DR}} \otimes_{k,\sigma} C = M_\omega \otimes C$. On a

$$\mathbb{Q}(1)_\sigma = 2\pi i\mathbb{Q} \subset C = \mathbb{Q}(1)_{\text{DR}} \otimes_{k,\sigma} C$$

et donc $\mathbb{Q}(n)_\sigma = (2\pi i)^n\mathbb{Q} \subset C$. Dans ces formules, le choix de la racine carrée i de -1 n'importe pas.

On reconstitue la $\mathbb{Q}$-structure M_ω de l'espace vectoriel gradué M_{DR} à partir de M_σ et $\text{comp}_{\sigma,\text{DR}}$ par

$$(M_\omega)_n \subset (M_{\text{DR}})_n \subset (M_{\text{DR}} \otimes_{k,\sigma} C)_n \quad \text{est } \frac{1}{(2\pi i)^n}\,\text{comp}_{\text{DR},\sigma}\text{Gr}^W_{-2n}(M_\sigma). \tag{2.11.3}$$

Ecrivons $G_\omega = \mathbb{G}_m \ltimes U_\omega$ pour $G_\omega\,\langle \text{MT}(k)\rangle$ et sa décomposition 2.5, et τ pour l'inclusion de $\mathbb{G}_m$ dans G_ω.

Proposition 2.12. *Il existe a_σ dans $G_\omega(C)$ tel que*

$$M_\sigma = \text{comp}_{\sigma,\omega}(a_\sigma M_\omega). \tag{2.12.1}$$

Si i est une racine carrée de -1 dans C, on peut choisir les a_σ de la forme

$$a_\sigma = a_\sigma^0\tau(2\pi i) \tag{2.12.2}$$

avec $a_\sigma^0 \in U_\omega(C)$ et $a_{\bar\sigma}^0 = (a_\sigma^0)^-$, d'où pour σ réel,

$$a_\sigma^0 \in U_\omega(\mathbb{R}) \qquad \textit{(pour } \sigma = \bar\sigma\textit{)} \tag{2.12.3}$$

La preuve est la même que celle de Deligne (1989) 8.10. Noter que (2.12.1) détermine a_σ à multiplication à droite près par un élément de $G_\omega(\mathbb{Q})$. Choisissons i dans C. La fonctorialité en C montre que si a_σ v'erifie (2.12.1), alors $\bar{a}_\sigma$ vérifie (2.12.1) pour $\bar{\sigma}$. Si on impose à a_σ d'être de la forme (2.12.2), avec a_σ^0 dans $U_\omega(C)$, alors $\bar{a}_\sigma = \bar{a}_\sigma^0 \tau(-2\pi i) = \bar{a}_\sigma^0 \tau(2\pi i)\tau(-1)$ et $\bar{a}_\sigma^0$ est bien un choix possible pour $a_{\bar{\sigma}}$. Pour la vérification qu'on peut même prendre $a_\sigma^0 \in U_\omega(\mathbb{R})$ si $\sigma = \bar{\sigma}$, on renvoie à loc. cit. Si on impose à a_σ d'être de la forme (2.12.2), son indétermination est réduite à $U_\omega(\mathbb{Q})$. Si σ est réel et qu'on impose en outre (2.12.3), elle est réduite à

$$\begin{aligned} U^+(\mathbb{Q}) :&= U(\mathbb{Q}) \cap \tau(2\pi i)^{-1} U(\mathbb{R}) \tau(2\pi i) \\ &= \exp\left(\prod \mathfrak{u}_{2n}\right). \end{aligned}$$

2.13. Appelons "système de réalisations de Hodge de Tate mixte" (sur k) la donnée suivante.

(a) un k-espace vectoriel gradué V_{DR}. La filtration (croissante et indexée par les entiers pairs) $W_{-2n} := \underset{m \geq n}{\oplus} (V_{\mathrm{DR}})_m$ est la *filtration par le poids* et la filtration décroissante $F^{-n} = \underset{m \leq n}{\oplus} (V_{\mathrm{DR}})_m$ la *filtration de Hodge.*

(b) pour tout plongement σ de k dans une clôture algébrique C de $\mathbb{R}$, un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V_σ muni d'une filtration croissante W indexée par les entiers pairs, fonctoriel en C.

(c) pour σ comme in (b), un isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{\sigma,\mathrm{DR}}$: $V_{\mathrm{DR}} \otimes_{k,\sigma} C \xrightarrow{\sim} V_\sigma \otimes C$, respectant la filtration par le poids et fonctoriel en C. Son inverse est noté $\mathrm{comp}_{\mathrm{DR},\sigma}$.

On suppose ces données telles que le sous-espace

$$(V_\omega)_n := \frac{1}{(2\pi i)^n} \mathrm{comp}_{\mathrm{DR},\sigma}(\mathrm{Gr}^W_{-2n}(V_\sigma)) \subset (V_{\mathrm{DR}})_n \otimes_{k,\sigma} C$$

soit contenu dans $(V_{\mathrm{DR}})_n$ et indépendant de σ.

La catégorie $\mathcal{R}_k^H$, ou simplement $\mathcal{R}^H$, de ces systèmes, munie du produit tensoriel évident, est une catégorie tannakienne, et 2.9 à 2.11 fournissent un $\otimes$-foncteur real^H de $\mathrm{MT}(k)$ dans $\mathcal{R}_k^H$.

La remarque suivante permettra de vérifier à peu de frais le caractère motivique d'objets qui nous intéressent.

Proposition 2.14. *Le foncteur* $\mathrm{real}^H\colon \mathrm{MT}(k) \to \mathcal{R}_k^H$ *est pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objet.*

Le point essentiel est que le foncteur real^H induit une injection de $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{real}^H(\mathbb{Q}(0)), \mathrm{real}^H(\mathbb{Q}(n)))$. Pour $n = 1$, cette injectivité est celle de

$$(\log \sigma)\colon k^* \otimes \mathbb{Q} \to \prod_{\sigma\colon k \to \mathbb{C}} \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Q}$$

(et un σ suffit à l'injectivité). Pour $n > 1$, elle est une conséquence de l'injectivité de l'application régulateur sur $K_{2n-1}(k)$.

Preuve. Le foncteur fibre ω identifie la catégorie $\mathcal{R}_k^H$ à celle des représentations d'un groupe algébrique $\mathbb{G}_m \ltimes U_\omega^H$, et le foncteur real^H au foncteur $\mathrm{Rep}(G_m \ltimes U_\omega) \to \mathrm{Rep}(\mathbb{G}_m \ltimes U_\omega^H)$ défini par un homomorphisme

$$\mathbb{G}_m \ltimes U_\omega^H \to \mathbb{G}_m \ltimes U_\omega.$$

L'injectivité sur Ext^1 assure que ce morphisme est surjectif, et 2.14 en résulte.

2.15 Variantes. (i) Puisque $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{MT}(k)$ stable par sous-objet, 2.14 vaut également pour le foncteur

$$\mathrm{real}^H\colon \mathrm{MT}(k)_\Gamma \to \mathcal{R}_k^H \tag{2.15.1}$$

(ii) Supposons donnée une factorisation du foncteur 2.15.1 par une catégorie abélienne $\mathcal{R}$:

$$\mathrm{real}^H = F \circ \mathrm{real}^{\mathcal{R}}\colon \mathrm{MT}(k)_\Gamma \to \mathcal{R} \to \mathcal{R}_k^H,$$

avec $\mathrm{real}^{\mathcal{R}}$ et F exacts et F fidèle. Le foncteur $\mathrm{real}^{\mathcal{R}}$ est alors pleinement fidèle d'image essentielle stable par sous-objet. “Pleinement fidèle” résulte formellement de “F fidèle” et “$F \circ \mathrm{real}^{\mathcal{R}}$ pleinement fidèle”. Que F soit exact et fidèle implique que pour R dans $\mathcal{R}$, F induit une injection

$$\{\text{sous-objets de } R\} \longrightarrow \{\text{sous-objets de } F(R)\}$$

et “image essentielle stable par sous-objet” résulte formellement de la même propriété pour $F \circ \mathrm{real}^{\mathcal{R}}$.

On peut par exemple prendre pour $\mathcal{R}$ la catégorie $\mathcal{R}^{H+\ell}$ suivante de systèmes de réalisations: un objet est la donnée de (a) (b) (c) comme en 2.13, plus les données ℓ-adiques suivantes:

(d) pour ℓ un nombre premier et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel V_ℓ, muni d'une filtration finie croissante W indexée par les entiers pairs, la filtration par le poids, dépendant fonctoriellement de $\bar{k}$. La fonctorialité en $\bar{k}$ doit définir une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, et on demande que la représentation $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(V_\ell)$ de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ soit isomorphe à une somme de copies de $\mathbb{Q}_\ell(n)$.

(e) pour σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de $\mathbb{R}$, et pour $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans C, un isomorphisme de comparaison

$$\mathrm{comp}_{\ell,\sigma}\colon V_\sigma \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} V_\ell$$

fonctoriel en C.

On suppose l'existence d'un système de réseaux $M_{\sigma,\mathbb{Z}} \subset M_\sigma$ tels que les

$$\mathrm{comp}_{\ell,\sigma}(M_{\sigma,\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}_l) \subset V_\ell$$

soient stables sous $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et indépendants de σ.

Tant dans $\mathcal{R}^H$ que dans $\mathcal{R}^{H+\ell}$, les seuls objets simples sont les réalisations des $\mathbb{Q}(n)$.

2.16. Pour k' une extension finie de k, on dispose d'un $\otimes$-foncteur “extension du corps de base à k'”: $M \mapsto M_{(k')}$ de $\mathrm{MT}(k)$ dans $\mathrm{MT}(k')$. L'existence et les propriétés du morphisme “norme” en K-théorie assurent par application de (0.4) que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(k)}(\mathbb{Q}(n),\mathbb{Q}(m)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(k')}(\mathbb{Q}(n),\mathbb{Q}(m)) \tag{2.16.1}$$

est injectif et que, pour k'/k une extension galoisienne, l'image est formée des invariants sous Galois:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(k)}(\mathbb{Q}(n),\mathbb{Q}(m)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(k')}(\mathbb{Q}(n),\mathbb{Q}(m))^{\mathrm{Gal}(k'/k)}. \tag{2.16.2}$$

Par les arguments de la preuve de 2.14, l'injectivité de (2.16.1) implique que le foncteur $M \mapsto M_{(k')}$ est pleinement fidèle, d'image essentielle stable par sous-objet. En particulier, si un motif de Tate mixte M' sur k' provient d'un motif de Tate mixte M sur k, ce dernier est déterminé à isomorphisme unique près par M'. Si la place finie v' de k' domine la place v de k, M' est non ramifié en v' si et seulement si M l'est en v.

2.17. Par 2.16, les catégories tannakiennes $\mathrm{MT}(k)$, pour k variable, forment un préchamp sur le site étale de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$. On note MAT le champ associé et on appelle $\mathrm{MAT}(k)$ la catégorie des motifs d'Artin-Tate mixte sur k. Explicitons cette définition.

Soit k_1 une extension galoisienne de k. Notons $\mathcal{C}(k_1/k)$ la catégorie des extensions finies k' de k dans lesquelles peut se plonger k_1. Soit $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ la catégorie des sections de MT au-dessus de $\mathcal{C}(k_1/k)$: la catégorie des systèmes d'objets $M_{(k')} \in \mathrm{MT}(k')$ pour $k' \in \mathcal{C}(k_1/k)$, et d'isomorphismes $M_{(k')(k'')} \xrightarrow{\sim} M_{(k'')}$ pour $k' \to k''$ dans $\mathcal{C}(k_1/k)$, vérifiant une compatibilité pour $k' \to k'' \to k'''$. La catégorie $\mathrm{MAT}(k)$ est la limite inductive des $\mathrm{MAT}(k_1/k)$, pour $\mathcal{C}(k_1/k)$ de plus en plus petit.

La filtration par le poids des objets des $\mathrm{MT}(k')$ étant fonctorielle et compatible aux extensions de corps de base, elle fournit une filtration par le poids sur chaque objet de $\mathrm{MAT}(k_1/k)$, ou de $\mathrm{MAT}(k)$.

La catégorie $\mathrm{MAT}(k)$ hérite de $\mathrm{MT}(k')$ de foncteurs fibre ω, DR, σ et ℓ, et d'isomorphismes de comparaison.

Foncteur fibre ω: le foncteur $M = (M_{(k')})_{k' \in \mathcal{C}(k_1/k)} \mapsto M_{(k_1)}$ est une équivalence de $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ avec la catégorie des objets de $\mathrm{MT}(k_1)$ munis d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(k_1/k)$ (donnée de descente galoisienne). Cette donnée de descente induit une action de $\mathrm{Gal}(k_1/k)$ sur $\omega(M) := \omega(M_{(k_1)})$ et le groupe de Galois motivique $\mathrm{Aut}(\omega)$ de $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ est le produit semi-direct de $\mathrm{Gal}(k_1/k)$ par le groupe de Galois motivique de $\mathrm{MT}(k_1)$.

Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et passons à la limite sur $k_1 \subset \bar{k}$. On définit

$$\omega(M) := \omega(M_{(k_1)}) \qquad \text{pour } k_1 \subset \bar{k} \text{ assez grand.}$$

Ce $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Foncteur fibre DR: défini par descente galoisienne à partir des foncteurs fibres DR des $\mathrm{MT}(k')$. Pour M dans $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ et $k' \in \mathcal{C}(k_1/k)$, on a fonctoriellement en k'

$$M_{\mathrm{DR}} \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} (M_{(k')})_{\mathrm{DR}},$$

et l'isomorphisme 2.10 fournit un isomorphisme de comparaison

$$M_{\mathrm{DR}} = (\omega(M_{(k_1)}) \otimes k_1)^{\mathrm{Gal}(k_1/k)}.$$

Foncteur fibre σ: pour σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de $\mathbb{R}$. C'est

$$M_\sigma := (M_{(k')})_{\sigma'}$$

pour σ le composé $k \subset k' \xhookrightarrow{\sigma'} C$ et k' assez grand pour que $M_{(k')}$ soit dans $\mathrm{MT}_{(k')}$.

Foncteur fibre ℓ: il dépend du choix d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, et est défini comme étant $(M_{(k')})_\ell$ pour $k' \subset \bar{k}$ assez grand.

Cas particulier. Les objets purement de poids 0 de $\mathrm{MT}(k')$, i.e. tels que $\mathrm{Gr}_{-2n}W = 0$ pour $n \neq 0$, sont les sommes de copies de $\mathbb{Q}(0)$, et ω_0 identifie leur catégorie à celle des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. En conséquence, pour $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, le foncteur ω identifie la catégorie des objets purement de poids 0 de $\mathrm{MAT}(k)$ avec celle des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ (motifs d'Artin).

Soit k_1 une extension galoisienne finie de k. Il résulte de 2.16 que le foncteur $\mathrm{MT}(k) \to \mathrm{MAT}(k_1/k)$ est pleinement fidèle d'image essentielle stable par sous-objet. L'image essentielle est aussi stable par extensions:

Proposition 2.18. *Pour qu'un objet M de $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ soit dans $\mathrm{MT}(k)$, il faut et il suffit que l'action de $\mathrm{Gal}(k_1/k)$ sur $\omega(M)$ soit triviale.*

Si M est purement de poids 0, la proposition résulte du "cas particulier" ci-dessus. Le cas où M est pur, i.e. purement d'un seul poids, en résulte par tensorisation avec un $\mathbb{Q}(n)$. Il reste à vérifier une stabilité par extensions.

1^{ere} *preuve.* Une suite spectrale d'Hochschild-Serre fournit, pour M et N dans $\mathrm{MT}(k)$, des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{MAT}(k_1/k)}(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p(M_{(k_1)}, N_{(k_1)})^{\mathrm{Gal}(k_1/k)}.$$

Pour vérifier que

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{MT}(k)}(M,N) \to \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{MAT}(k'/k)}(M,N) = \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{MT}(k_1)}(M_{(k_1)}, N_{(k_1)})^{\mathrm{Gal}(k_1/k)}$$

est bijectif pour $p = 0, 1$ et injectif pour $p = 2$, il suffit par dévissage de le vérifier pour M et N de la forme $\mathbb{Q}(m)$ et $\mathbb{Q}(n)$. Le cas $p = 2$ résulte de la nullité des Ext^2, le cas $p = 0$ résulte de ce que $\mathrm{Hom} = 0$, sauf pour $m = n$, où $\mathrm{End}(\mathbb{Q}(n)) = \mathbb{Q}$, et $p = 1$ est 2.16.

Plutot que de définir la suite spectrale d'Hochschild-Serre requise, on peut la paraphraser:

$2^{\text{ème}}$ *preuve.* Si M est une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+r)$, que $M_{(k_1)}$ admette une donnée de descente de k_1 à k, respectant la structure d'extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+r)$, implique que la classe de $M_{(k_1)}$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(k_1)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+r))$ est fixe sous $\mathrm{Gal}(k_1/k)$. Elle provient donc de la classe d'une extension $\widetilde{M}$ de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+r)$ dans $\mathrm{MT}(k)$. On vérifie, utilisant que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MT}(k_1)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+r)) = 0$, que M est isomorphe à l'image de $\widetilde{M}$.

Prouvons par récurrence sur $r \geq 0$ que 2.18 est vrai sous l'hypothèse additionnelle que pour un n on ait $M = W_{-2n}M$ et $W_{-2(n+r+1)}M = 0$.

Le cas où $r = 0$ (M pur) a déjà été traité. Le cas $r = 1$ se réduit à celui d'une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+1)$.

Pour $r \geq 1$, l'hypothèse de récurrence assure que $M' = M/W_{-2(n+r)}M$ et $M'' = W_{-2(n+1)}M$ proviennent de $\widetilde{M}'$ et $\widetilde{M}''$ dans $\mathrm{MT}(k)$. Ce sont des extensions de la forme: $\mathrm{Gr}^W_{-2n}M$ par N et N par $\mathrm{Gr}^W_{-2(n+r)}M$. Par nullité des Ext^2 dans $\mathrm{MT}(k)$, il existe dans $\mathrm{MT}(k)$ un objet $\widetilde{M}$, extension itérée de $\mathrm{Gr}^W_{-2n}M$ par N par $\mathrm{Gr}^W_{-2(n+r)}M$, redonnant $\widetilde{M}'$ et $\widetilde{M}''$. L'image de $\widetilde{M}$ dans $\mathrm{MAT}(k_1/k)$ diffère de M par une extension de $\mathrm{Gr}^W_{-2n}M$ par $\mathrm{Gr}^W_{-2(n+r)}M$.

Cette dernière provient d'une extension dans $\mathrm{MT}(k)$, par réduction au cas d'une extension de $\mathbb{Q}(n)$ par $\mathbb{Q}(n+r)$, et ceci permet de corriger $\widetilde{M}$ pour que son image devienne isomorphe à M.

3. Cohomologie et groupe fondamental.

3.1. Soit X un espace topologique séparé et connexe. On note ${}_bP_a$ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de a à b, et $\delta\gamma$ la composition des chemins ${}_cP_b \times {}_bP_a \to {}_cP_a$. Noter l'ordre des facteurs, choisi pour que si V est un système local sur X et que $\gamma v \in V_b$ denote le transport de $v \in V_a$ le long de $\gamma \in {}_bP_a$, on ait $(\delta\gamma)v = \delta(\gamma v)$.

Nous ferons sur X les hypothèses (a) (b) (c) suivantes. (a) La théorie classique du π_1 s'applique. Par exemple: X localement connexe par arcs et localement simplement connexe. (b) Le groupe fondamental est de type fini. (c) Pour une projection p: $X^n \times X^m \to X^n$ et un faisceau constant, Rp_* commute au passage aux fibres. Ces conditions sont remplies pour X homéomorphe au complément dans un polyèdre fini d'un sous-polyèdre, par exemple pour X une variété algébrique complexe.

Fixons un corps F, le corps des coefficients. Soient $a \in X$, Λ l'algèbre de groupe $F[\pi_1(X,a)]$ et I son idéal d'augmentation. La donnée d'un Λ-module à gauche V, i.e. d'une représentation linéaire de $\pi_1(X,a)$ sur un F-espace vectoriel, équivaut à celle d'un système local $V\tilde{}$ sur X de fibre V en a. Si on prend pour V le Λ-module Λ, on obtient le système local de fibre en x l'espace vectoriel $F[{}_xP_a]$ de base ${}_xP_a$. La structure de Λ-module à droite de Λ en fournit une sur ce système local $\Lambda\tilde{}$, i.e. une action à droite de $\pi_1(X,a)$. L'élément γ de $\pi_1(X,a)$ agit sur ${}_xP_a$ par composition à droite. Le système local $(\Lambda/I^n)\tilde{}$ est le quotient $\Lambda\tilde{} \otimes_\Lambda \Lambda/I^n$ de $\Lambda\tilde{}$.

Le système local $(\Lambda/I^n)\tilde{}$ est extension itérée des n systèmes locaux triviaux I^p/I^{p+1} $(0 \leq p < n)$. Sa fibre $(\Lambda/I^n)\tilde{}_a$ en a est Λ/I^n et l'unité 1 définit

$$F \to (\Lambda/I^n)\tilde{}_a\colon \lambda \longmapsto \lambda.1. \qquad (3.1.1)$$

Le système local $(\Lambda/I^n)\tilde{}$ est universel parmi les systèmes locaux E extension itérée de n systèmes locaux triviaux et munis de $F \to E_a$, car $(\Lambda/I^n, 1)$ est universel parmi les Λ-modules M tels que $I^n M = 0$ munis de $m_0 \in M$.

3.2. Dans ce qui suit, nous laisserons de nombreux signes ambigus. Plusieurs conventions sont possibles, et aucune ne nous semble clairement meilleure. Elles n'importent guère, car elles conduisent à des complexes isomorphes, avec pour l'isomorphisme au pis l'ambiguïté d'un signe global. Typiquement, changer de convention remplace un complexe par un autre ayant les mêmes composantes, et l'isomorphisme est donné par des signes dépendant de multidegrés.

3.3. Fixons $a, b \in X$ et considérons dans X^n les sous-espaces $b = t_1$, $t_1 = t_2, \ldots, t_n = a$, notés $Y_0, \ldots, Y_n$. Pour $J \subset \Delta_n := \{0, 1, \ldots, n\}$, soient Y_J l'intersection des Y_j $(j \in J)$ et F_J le faisceau constant F sur Y_J, prolongé par zéro sur X^n. Pour $J \subset K$, on a $Y_K \subset Y_J$ et on dispose d'un morphisme de restriction $F_J \to F_K$. Si, pour $K = \{k_0, \ldots, k_p\}$, les k_ℓ étant pris dans l'ordre croissant, et $J = \{k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p\}$, on l'affecte du signe $(-1)^i$, on obtient les composantes de la différentielle d'un complexe de faisceaux sur X^n:

$$F \to \oplus F_{\{j\}} \to \cdots \to \bigoplus_{|J|=p} F_J \to \cdots \to F_{\Delta_n}. \tag{3.3.1}$$

Noter que le dernier terme F_{Δ_n} est nul sauf pour $n = 0$ ou $a = b$, auxquels cas il est réduit à k en $t_1 = \ldots = t_n = a$. Si on supprime le premier terme et qu'on convient que les degrés vont de 0 à n, on obtient la résolution Čechiste alternée du faisceau constant F sur la réunion $\cup Y_i$ des Y_i pour le recouvrement fermé fini par les Y_i, prolongée par 0 sur X^n.

Définissons ${}_b\mathcal{K}_a\langle n\rangle$, ou simplement ${}_b\mathcal{K}_a$, comme étant le complexe (3.3.1), avec F_{Δ_n} omis, et les degrés allant de 0 à n. Si $n > 0$ et que $a \neq b$, c'est une résolution du prolongement par 0 du faisceau constant k sur $X^n - \cup Y_i$, et

$$\mathbb{H}^*(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = H^*(X^n \bmod \cup Y_i, F) \quad (\text{pour } n \neq 0,\ a \neq b) \tag{3.3.2}$$

Si $a = b$, la dernière différentielle (3.3.1) fournit un morphisme de complexes

$${}_a\mathcal{K}_a \to F_{t_1 = \cdots = t_n = a}[-n], \tag{3.3.3}$$

qui induit

$$\mathbb{H}^n(X^n, {}_a\mathcal{K}_a) \to F. \tag{3.3.4}$$

Si on répète ces constructions en prenant a et b comme paramètres, on obtient un complexe ${}_*\mathcal{K}_*$ sur $X \times X^n \times X$, et, pour p la projection $X \times X^n \times X \to X \times X$, la restriction de ${}_*\mathcal{K}_*$ à $X^n \xrightarrow{\sim} p^{-1}(b,a)$ s'identifie à ${}_b\mathcal{K}_a$. Traitant seulement b comme paramètre, on obtient de même ${}_*\mathcal{K}_a$ sur $X \times X^n$. Les $\mathbb{H}^i(X^n, {}_b\mathcal{K}_a)$ sont les fibres du système local $R^i p_*({}_*\mathcal{K}_*)$ sur $X \times X$.

Nous allons, d'après Beilinson, vérifier la

Proposition 3.4. *(i) Pour $i < n$, $\mathbb{H}^i(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = 0$. (ii) Pour b variable, le système local sur X des $\mathbb{H}^n(X^n, {}_b\mathcal{K}_a)$, muni en $b = a$ de (3.3.4), est le dual du système local $(\Lambda/I^{n+1})\check{}$ de 3.1, muni du transposé de (3.1.1).*

Preuve. Pour $n = 0$, X^n est réduit à un point, ${}_b\mathcal{K}_a$ est le faisceau constant F en degré 0 et (i) (ii) sont clairs. Prouvons 3.4 par récurrence sur $n \geq 1$; l'hypothèse de récurrence est la validité de 3.4 pour m si $m < n$.

Soit q la première projection: $X^n \to X$. Nous utiliserons la suite spectrale de Leray pour q. Ceci revient à écrire que $R\Gamma(X^n, \quad) = R\Gamma(X, Rq_* \quad)$ et à filtrer Rq_* par la filtration canonique τ. Plus précisément, nous utiliserons une filtration ayant une description uniforme pour $a = b$ ou $a \neq b$, et qui revient à la filtration canonique si $a \neq b$.

Un dévissage montre que la formation de $Rq_{*b}\mathcal{K}_a$ commute au passage aux fibres. Si on écrit X^n comme $X \times X^{n-1}$, ${}_b\mathcal{K}_a$ sur X^n s'identifie au cône$[-1]$ de

$$(3.4.1) \qquad \begin{aligned} {}_*\mathcal{K}_a \langle n-1 \rangle \to {}_b\mathcal{K}_a \langle n-1 \rangle \quad & \text{sur} \quad \{b\} \times X^{n-1} \\ \oplus\, F_{\underline{t=a}} \quad & \text{sur} \quad \{a\} \times X^{n-1} \end{aligned}$$

(complexe simple associé au complexe double de première (resp. deuxième) colonne la source (resp. but) de (3.4.1)).

On reconnaît à gauche les F_J pour $0 \notin J$ et $J \neq \{1, \ldots, m\}$, à droite les F_J d'une part pour $0 \in J$, de l'autre pour $J = \{1, \ldots, n\}$.

Si $a \neq b$, la restriction de ${}_b\mathcal{K}_a$ à $q^{-1}(t) = X^{n-1}$ est donc: pour $t \neq a, b$: ${}_t\mathcal{K}_a \langle n-1 \rangle$; pour $t = b$: le cône$[-1]$ de l'application identique de ${}_b\mathcal{K}_a \langle n-1 \rangle$; pour $t = a$: le cône$[-1]$ de (3.3.3). D'après l'hypothèse de récurrence, $R^i q_{*b}\mathcal{K}_a = 0$ si $i < n-1$. Pour $i = n-1$, c'est un sous-faisceau du système local $(\Lambda/I^n)^{\sim\vee}$. Il coïncide avec $(\Lambda/I^n)^{\sim\vee}$ si $t \neq a, b$, est nul en $t = b$ et la fibre en a est le noyau du transposé de (3.3.1). Pour $i \geq n$, $R^i q_{*b}\mathcal{K}_a$ est un système local sur $X - \{b\}$ prolongé par 0 sur X. La suite spectrale de Leray vérifie donc $E_2^{pq} = 0$ pour $q \leq n-2$ ou $p = 0$, et

$$(3.4.2)\qquad \begin{aligned} &\mathbb{H}^i(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n \\ &\mathbb{H}^n(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = \mathbb{H}^1(X, R^{n-1}q_{*b}\mathcal{K}_a) \quad (\text{pour } a \neq b). \end{aligned}$$

Ce $\mathbb{H}^1$ est le groupe des extensions du faisceau constant F par $(\Lambda/I^n)^{\sim\vee}$, trivialisées en $t = b$, et trivialisées après avoir poussé par $(\Lambda/I^n)^\vee \to F$ en $t = a$. Dualement, c'est le groupe des extensions $\widetilde{E}$ de $(\Lambda/I^n)^\sim$ par F, trivialisées en $t = b$, et trivialisées au-dessus de $F \subset \Lambda/I^n$ en $t = a$.

Traduisons en termes de Λ-modules. A $\widetilde{E}$ correspond un Λ-module E, extension de Λ/I^n par le module d'augmentation F. Il est annulé par I^{n+1}. La donnée additionnelle en a est celle d'un relèvement $\tilde{1}$ du générateur 1 de Λ/I^n dans E. Soit α: $I^n/I^{n+1} \to F$ la restriction à I^n/I^{n+1} du morphisme de Λ/I^{n+1} dans E: $\lambda \mapsto \lambda\tilde{1}$. L'extension E est l'extension E_α déduite de l'extension Λ/I^{n+1} de Λ/I^n par I^n/I^{n+1} en poussant par α:

$$(3.4.3)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I^n/I^{n+1} & \longrightarrow & \Lambda/I^{n+1} & \longrightarrow & \Lambda/I^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Lambda/I^{n+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Pour α: $I^n/I^{n+1} \to F$. L'extension $E_\alpha^\sim$ de $(\Lambda/I^n)^\sim$ par le système local trivial F se déduit de $(\Lambda/I^{n+1})^\sim$ en poussant par

$$\alpha\colon \text{ (système local trivial } I^n/I^{n+1}) \to F.$$

La trivialisation β en b fournit un diagramme

$$(3.4.4)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I^n/I^{n+1} & \longrightarrow & (\Lambda/I^{n+1})^\sim_b & \longrightarrow & (\Lambda/I^n)^\sim_b & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & (E_\alpha)^\sim_b & \overset{\beta}{\leftrightarrows} & (\Lambda/I^n)^\sim_b & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De α et β on déduit une forme linéaire γ sur $(\Lambda/I^{n+1})\tilde{}_b$: à $x \in (\Lambda/I^{n+1})\tilde{}_b$, d'image $\bar{x}$ dans $(\Lambda/I^n)\tilde{}_b$, attacher

$$\gamma(x) := \text{image}(x) - \beta(\bar{x}) \in \mathbb{Q} \subset (E_\alpha\tilde{})_b.$$

On a $\alpha = \gamma|(I^n/I^{n+1})$, et γ détermine β. Ceci fournit l'isomorphisme

$$\mathbb{H}^n(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = ((\Lambda/I^{n+1})\tilde{}_b)^\vee$$

annoncé.

Présentés un peu différemment, ces arguments continuent à s'appliquer pour $a = b$. L'image par Rq_* du complexe ${}_b\mathcal{K}_a$, cône$[-1]$ de (3.4.1) est encore un cône$[-1]$. On définit sa filtration croissante Fil en filtrant source et but par la filtration canonique $\tau_\leq$. Le gradué $\mathrm{Gr}_i^{\mathrm{Fil}}$ s'envoie par un quasi-isomorphisme sur le complexe

(3.4.5) $$R^i q_{**}\mathcal{K}_a \langle n-1\rangle \to \ (\text{sa fibre en a})_a \oplus (F \text{ si } i = n-1)$$

en degrés 0 et 1, translaté par $[-i]$. Pour $i < n-1$, (3.4.5) est nul. Pour tout i, $\mathbb{H}^0((3.4.5)) = 0$. La suite spectrale pour $R\Gamma(X, \quad)$ et Fil donne donc

(3.4.6)
$$\mathbb{H}^i(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = 0 \quad \text{pour } i < n$$
$$H^n(X^n, {}_b\mathcal{K}_a) = \mathbb{H}^1(X, (3.4.5)_{i=n-1}).$$

Ce $\mathbb{H}^1$ classifie les extensions du faisceau constant F par $(\Lambda/I^n)\tilde{}^\vee = R^{n-1}q_{**}\mathcal{K}_a \langle n-1\rangle$, trivialisées après avoir poussé par le morphisme (3.4.5), et les arguments donnés pour $a \neq b$ peuvent être répétés.

Il reste, pour $a = b$, à identifier (3.3.4). Le complexe (3.3.1) (degrés 0 à $n+1$) est le complexe simple associé au complexe triple de faisceaux sur $X^n = X \times X^{n-1}$:

$$\begin{array}{ccc}
{}_*\mathcal{K}_a \langle n-1\rangle & \longrightarrow & {}_a\mathcal{K}_a \langle n-1\rangle \ \text{ sur } q^{-1}(a) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
F[-(n-1)]_{\underline{t}=a} & \xrightarrow{\ \sim\ } & F[-(n-1)]_{\underline{t}=a}
\end{array}$$

et (3.3.4) est induit par le morphisme

$$\begin{array}{ccc} {}_*\mathcal{K}_a\langle n-1\rangle & \longrightarrow & {}_a\mathcal{K}_a\langle n-1\rangle \text{ sur } \mathrm{pr}^{-1}(a) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F[-(n-1)]_{\underline{t}=a} & \longrightarrow & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F[-(n-1)]. \end{array}$$

Filtrant comme précédemment, on en déduit que (3.2.1) est le $\mathbb{H}^1$ du morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda/I^n)^{\vee\tilde{}} & \longrightarrow & (\Lambda/I^n)^{\tilde{}}_a \oplus F_a \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_a \end{array}$$

(La flèche verticale droite donnant le morphisme est la différence entre l'évaluation sur $F \subset \Lambda/I^n$ et l'identité de F_a.)

Une extension de F par $(\Lambda/I^n)^{\vee\tilde{}}$, trivialisée après avoir poussé par (3.3.4), se dualise en une extension de $(\Lambda/I^n)^{\tilde{}}$ par F qui en a est et trivialisée, et trivialisée au-dessus de $F \subset \Lambda/I^n = (\Lambda/I^n)^{\tilde{}}_a$. On lui attache la différence au-dessus de F entre ces deux trivialisations. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cela revient à évaluer en 1 une forme linéaire sur Λ/I^{n+1}.

3.5 Remarque. Dans cette identification de $(F[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1})^\vee$ avec le groupe des extensions de $(\Lambda/I^n)^{\tilde{}}$ par F, munies de trivialisations convenables en a et b, le sous-espace $(F[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^n)^\vee$ est celui des extensions triviales, avec la trivialisation évidente en a et une trivialisation en b. L'injection de $(F[{}_bP_a]/I^n)^\vee \to (F[{}_aP_b]/I^{n+1})^\vee$ est donc le $\mathbb{H}^n$ de

$$\left({}_b\mathcal{K}_a\langle n-1\rangle \text{ sur } \{b\} \times X^{n+1}\right)[-1] \to {}_b\mathcal{K}_a \text{ sur } X^n \tag{3.5.1}$$

déduit de la description du second membre comme cône$[-1]$ de (3.4.1).

3.6. Nous regarderons un objet simplicial tantôt comme un foncteur contravariant sur la catégorie de tous les ensembles totalement ordonnés finis non vides, tantôt comme un foncteur sur la sous-catégorie des $\Delta_n = \{0, \ldots, n\}$. Cela revient au même (équivalence de catégories). Si la valeur sur Δ_n d'un objet simplicial S est notée S_n, on notera S_I sa valeur sur I totalement ordonné. Elle est fonctorielle en I et si I a $n+1$ élément, l'unique isomorphisme de I avec Δ_n fournit un isomorphisme de S_I avec S_n.

Le morphismes $\Delta_n \to \Delta_1$ sont les

$$\varphi_i\colon 0,\dots,i-1 \longmapsto 0;\ i,\dots,n \longmapsto 1 \qquad (0 \le i \le n+1). \tag{3.6.1}$$

Nous identifierons par cette numérotation $X^{\mathrm{Hom}(\Delta_n,\Delta_1)}$ à $X \times X^n \times X$. L'ensemble simplicial $\Delta_n \mapsto \mathrm{Hom}(\Delta_n,\Delta_1)$ contient l'ensemble simplicial $\Delta_n \mapsto \mathrm{Hom}(\Delta_n,\partial\Delta_1) = \{\varphi_0,\varphi_{n+1}\}$. L'espace cosimplicial $\Delta_n \mapsto X^{\mathrm{Hom}(\Delta_n,\Delta_1)}$ se projette donc sur l'espace cosimplicial $\Delta_n \mapsto X^{\mathrm{Hom}(\Delta_n,\partial\Delta_1)} = X \times X$. Prenant la fibre en (b,a), on obtient un espace cosimplicial $\Delta_n \mapsto X^n$. Les $\partial_i\colon X^{n-1} \to X^n$ $(0 \le i \le n)$ sont les

$$\begin{aligned} t_1,\dots,t_{n-1} \longmapsto\ & b,t_1,\dots,t_{n-1} && (i=0)\\ & t_1,\dots,t_i,t_i,\dots,t_{n-1} && (i \ne 0,n)\\ & t_1,\dots,t_{n-1},a && (i=n)\ , \end{aligned}$$

d'images les Y_i de 3.3. Plus généralement, pour $J \subset \{0,\dots,n\}$ de complément I, supposé non vide, $p = |I|-1$ et φ_I l'inclusion de I, le morphisme cosimplicial $\varphi_I\colon X^p \to X^n$ identifie X^p avec $Y_J \subset X^n$. Pour J, J' de compléments I, I' et $p = |I|-1$, $p' = |I'|-1$, si $J \subset J'$ et que $\varphi_{II'}$ est l'inclusion de I' dans I, le morphisme cosimplicial $\varphi_{II'}\colon X^{p'} \to X^p$ s'identifie à l'inclusion de $Y_{J'}$ dans Y_J. Noter que pour $J = \{j_0,\dots,\hat{j}_k,\dots,j_p\} \subset J' = \{j_0,\dots,j_p\}$ donnant lieu à $I' = \{i_0,\dots,\hat{i}_\ell,\dots,i_q\} \subset I = \{i_0,\dots,i_q\}$ (les i et j sont pris dans l'ordre croissant), on a $p+q=n$, $k+\ell = i_\ell = j_k$, et le signe $(-1)^k$ que nous avons employé en 3.3 peut se récrire

$$(-1)^k = (-1)^\ell \cdot (-1)^{j_k} = \varepsilon(J)(-1)^\ell\varepsilon(J')$$

pour

$$\varepsilon(J) = \prod_{j\in J}(-1)^j. \tag{3.6.2}$$

3.7. Choisissons des complexes S_m^* qui calculent la cohomologie des X^m, et soient fonctoriels pour les morphismes cosimpliciaux entre les X^m. Plus précisément: on prend pour S_m^* le complexe des sections globales d'une résolution fonctorielle $\mathcal{S}_m^*$ du faisceau constant F sur X^m, telle que $\Gamma(X^m, \mathcal{S}_m^*) \to R\Gamma(X^m, \mathcal{S}_m^*)$ soit un quasi-isomorphisme. A m variable, les S_m^* forment un système simplicial de complexes. Les $\mathcal{S}_m^*$ fournissent une résolution de ${}_b\mathcal{K}_a \langle n \rangle$ sur X^n: avec les notations de 3.6, résoudre F_J par $\varphi_{I*}\mathcal{S}_I^*$ et utiliser la fonctorialité de $\mathcal{S}_I^*$ en I.

Un *système de coefficients* c sur le simplexe standard Δ_n, à valeurs dans une catégorie additive, attache à chaque facette $\tau \subset \Delta_m$ un objet $c(\tau)$, contravariant en τ pour les morphismes d'inclusion. Il définit un complexe de chaînes

$$C_p(\Delta_n, c) = \bigoplus_{|\tau|=p+1} c(\tau).$$

Dualement, un cosystème: $c(\tau)$ covariant en τ, définit un complexe de cochaînes.

Si $s_\bullet$ est un objet simplicial, on note encore $C_*(\Delta_n, s_\bullet)$ le complexe $C_*(\Delta_n, c)$ pour $c(\tau) := s_\tau$. Dualement pour $s^\bullet$ cosimplicial.

Le complexe

$$\Gamma(X^n, \text{ résolution de } {}_b\mathcal{K}_a \text{ définie par } \mathcal{S}_\bullet),$$

calcule l'hypercohomologie de ${}_b\mathcal{K}_a$. Il s'identifie (avec les signes (3.6.2)) au complexe simple associé au complexe double (= complexe de complexes)

$$C_*(\Delta_n, S_\bullet^*),$$

translaté par $[-n]$, et 3.4 (ii) se récrit

$$(k[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1})^\vee = H^0 C_*(\Delta_n, S_\bullet^*). \tag{3.7.1}$$

3.8 Exemple: prenons pour S_m^* le complexe des cochaînes singulières de X^m. Il ne rentre pas tout à fait dans le cadre précédent, mais on peut l'y ramener: si $\mathcal{S}_m^*$ est le complexe des cochaînes singulières localisées sur X^m (le faisceau associé au préfaisceau des cochaînes singulières), $S_m^* \to \Gamma(X^m, \mathcal{S}_m^*)$ est un quasi-isomorphisme. Le complexe S_m^* des cochaînes singulières est le dual du complexe S^m_* des chaînes singulières. A m variable, S^m_* est cosimplicial en m, et $C_*(\Delta_n, S^*_\bullet)$ est le dual de $C^*(\Delta_n, S^\bullet_*)$. On a donc

$$F[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1} = H^0 C^*(\Delta_n, S^\bullet_*) \tag{3.8.1}$$

Pour $X = [0,1]$, $a = 0$ et $b = 1$, ${}_bP_a$ est réduit à un élément et chaque $k[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1}$ est réduit à F. Au membre de gauche, les $C^*(\Delta_n, S^\bullet_*)$ forment un système projectif, de morphismes de transition déduits, après dualisation, de (3.5.1):

$$C^*(\Delta_n, S^\bullet_*) \to C^*(\Delta_{n-1}, S^\bullet_*)$$

est induit par ∂_0: $\Delta_{n-1} \hookrightarrow \Delta_n$.

Pour qu'un cocycle de degré zéro de $C^*(\Delta_n, S^\bullet_*)$ corresponde au chemin de 0 à 1, il faut et il suffit que sa valeur en $\{n\} = \partial_0^n(\Delta_0) \subset \Delta_n$ soit $1 \in S^0$, le complexe des chaînes singulières du point. On a $[0,1] = |\Delta_1|$. Soit σ_m le simplexe $|\Delta_m| \to |\Delta_1|^m = [0,1]^m$ de coordonnées les dégénérescences φ_i $(1 \leq i \leq m)$ de (3.6.1). Son image est $\{\underline{t} | 1 \geq t_1 \geq \ldots \geq t_m \geq 0\}$. Comme cocycle, on peut prendre celui qui à chaque face de dimension p de Δ_n attache $\pm\sigma_p$, le signe étant $+$ pour $p = 0$ et dépendant des conventions de signes définissant $C^*(\Delta_n, S^\bullet_*)$ pour $p > 0$.

Par fonctorialité en X, on en déduit que, pour X, l'image dans $H^0 C^*(\Delta_n, S_*)$ d'un chemin γ: $[0,1] \to X$ de a à b est représentée par le cocycle qui à chaque face de dimension p de Δ_n attache $\pm\gamma \circ \sigma_p$: $|\Delta_p| \to [0,1]^p \to X^p$, le signe étant comme ci-desssus.

3.9. La littérature donne une autre recette pour déduire $(F[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1})^\vee$ de l'objet simplicial $S^*_\bullet$ de la catégorie des complexes considéré en 3.7:

(a) prendre le complexe normalisé $NS^*_\bullet$ de cet objet simplicial;

(b) prendre le tronqué $\sigma_{\geq -n} NS^*_\bullet$ qui ne garde que les NS^*_m pour $m \leq n$;

(c) prendre le complexe simple associé au complexe double $\sigma_{\geq -n} NS^*_\bullet$ et son H^0.

L'équivalence entre les deux constructions résulte du lemme suivant. Rappelons qu'une *catégorie karoubienne* est une catégorie additive dans laquelle tout endomorphisme idempotent admet un noyau, et que l'équivalence de Dold-Puppe: (objet simplicial $S_\bullet$)→ (complexe $NS_\bullet$ à degrés ≤ 0) est disponible dans une telle catégorie (NS_k est facteur direct de S_k)

Proposition 3.10. *Si $S_\bullet$ est un objet simplicial d'une catégorie karoubienne, le complexe $C_*(\Delta_n, S_\bullet)$ et le tronqué normalisé $\sigma_{\geq -n} NS_\bullet$ sont fonctoriellement homotopes.*

Nous vérifierons par la méthode des modèles acycliques l'énoncé dual, pour un objet cosimplicial $S^\bullet$, $\sigma_{\leq n} NS^\bullet$ et $C^*(\Delta_n, S^\bullet)$.

Preuve. Nous noterons $\mathcal{C}_\mathbb{Z}$ la catégorie préadditive ayant les mêmes objets qu'une catégorie $\mathcal{C}$, pour laquelle $\mathrm{Hom}(A,B)$ est le groupe abélien librement engendré par $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A,B)$. Nous noterons $\mathcal{C}_{\mathrm{kar}}$ son enveloppe karoubienne, obtenue par adjonction formelle de sommes finies et de facteurs directs noyaux d'endomorphismes idempotents. Le foncteur contravariant

$$X \longmapsto h^X_\mathbb{Z} \colon \mathcal{C}_{\mathrm{kar}} \to \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{C}, Ab), \quad h^X_\mathbb{Z}(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathrm{kar}}}(X,Y)$$

est pleinement fidèle. Il induit une équivalence de $\mathcal{C}_{\mathrm{kar}}$ avec la sous-catégorie de la catégorie abélienne $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{C}, Ab)$ d'objets les facteurs directs de sommes finies de foncteurs

$$Y \longmapsto \text{ groupe abélien librement engendré par } \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X,Y),$$

pour X dans $\mathcal{C}$. Ces foncteurs sont des objets projectifs de la catégorie abélienne $\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{C}, Ab)$, car pour C dans $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}(h^C_\mathbb{Z}, F) = F(C)$$

(variante du lemme de Yoneda).

Si Δ est la catégorie des Δ_n, l'objet cosimplicial (Δ_n) de Δ_{kar} est universel en ce sens que, pour $\mathcal{A}$ une catégorie karoubienne, $F \mapsto F((\Delta_n))$ est un équivalence

$$(\text{foncteurs } \Delta_{\mathrm{kar}} \to \mathcal{A}) \to (\text{objets cosimpliciaux de } \mathcal{A})$$

Pour vérifier l'énoncé $(3.10)^*$ dual de 3.10, et montrer que l'équivalence d'homotopie peut être donnée par des formules universelles, il suffit de vérifier $(3.10)^*$ dans le cas universel:

pour l'objet (Δ_n) de Δ_{kar}. Si $\Delta_{\leq n}$ est la sous-catégorie de Δ d'objets les Δ_m pour $m \leq n$, tant $\sigma_{\geq -n} N\Delta_\bullet$ que $C_*(\Delta_n, \Delta_\bullet)$ sont dans $(\Delta_{\leq n})_{\text{kar}}$, et c'est dans $(\Delta_{\leq n})_{\text{kar}}$ que nous travaillerons.

Appliquons le foncteur $X \mapsto h_{\mathbb{Z}}^X$ à $\sigma_{\leq n} N\Delta^\bullet$ et à $C^*(\Delta_n, \Delta^\bullet)$. On obtient deux complexes d'objets projectifs de la catégorie abélienne $\mathcal{H}\mathrm{om}(\Delta_{\leq n}, Ab)$. Nous montrerons qu'ils sont l'un et l'autre une résolution projective du foncteur constant $\mathbb{Z}$, donc sont homotopes, et on conclut par la pleine fidélité de $X \mapsto h_{\mathbb{Z}}^X$. Si on évalue en Δ_p $(p \leq n)$, on obtient les complexes $\sigma_{\geq -n} NS_\bullet$ et $C_*(\Delta_n, S_\bullet)$ de 3.10 pour $S_\bullet$ le complexe chaînes simpliciales de Δ_p. Ce sont

(a) le complexe des chaînes non dégénérées de Δ_p, égal à son tronqué car $p \leq n$.

(b) le complexe des chaînes combinaisons linéaires de $\Delta_q \to \Delta_n \times \Delta_p$, avec la première projection injective.

Ces deux complexes sont augmentés vers $\mathbb{Z}$, fonctoriellement en Δ_p. Puisque $|\Delta_p|$ est contractile, et que le complexe (a) calcule son homologie, il est une résolution de $\mathbb{Z}$. Le complexe (b) est le complexe des chaînes non dégénérées du sous-polytope simplicial suivant de $|\Delta_n \times \Delta_p|$:

(3.10.1) la réunion, pour $\varphi\colon \Delta_n \to \Delta_p$, des graphes Γ_φ des morphismes $|\varphi|\colon |\Delta_n| \to |\Delta_p|$.

Pour vérifier que le complexe (b) est une résolution de $\mathbb{Z}$, il suffit donc de vérifier le

Lemme 3.10.2. *L'espace (3.10.1) est contractile.*

Preuve. Ordonnons lexicographiquement l'ensemble des applications croissantes

$$\varphi\colon \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, p\}.$$

Montrons que pour tout $\varphi \neq 0$,

$$\Gamma_\varphi \cap \bigcup_{\varphi' < \varphi} \Gamma_{\varphi'}$$

est une union non vide de faces du simplexe Γ_φ, mais non de toutes les faces de Γ_φ, de sorte que $\bigcup\limits_{\varphi' < \varphi} \Gamma_{\varphi'}$ est rétracte par déformation de $\bigcup\limits_{\varphi' \leq \varphi} \Gamma_{\varphi'}$.

Quels que soient φ' et φ, si $F \subset \{0, \dots, n\}$ est l'ensemble des i tels que $\varphi(i) = \varphi'(i)$, et $|F|$ la facette correspondante Δ_m, $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi'}$ est le graphe de la restriction de $|\varphi|$ ou $|\varphi'|$ à $|F|$.

Identifions Γ_φ à $|\Delta_m|$ par la projection sur Δ_m. Si $\varphi' < \varphi$, soit i minimal tel que $\varphi'(i) < \varphi(i)$. Si φ'' est défini par $\varphi''(j) = \varphi'(j)$ (resp. $\varphi(j)$) pour $j \leq i$ (resp. $j > i$), on a $\varphi'' < \varphi$ et $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi'} \subset \Gamma_\varphi \cap \Gamma_{\varphi''}$, qui s'identifie à la face d'indice i de $|\Delta_m|$. L'intersection $\Gamma_\varphi \cap \bigcup_{\varphi' < \varphi} \Gamma_{\varphi'}$ est donc réunion non vide de faces.

Pour que la face d'indice i soit obtenue, il faut et il suffit que $\varphi(i) \neq 0$, et que, si $i \neq 0$, on ait $\varphi(i-1) < \varphi(i)$. Parce que $n \geq p$, toutes les faces ne sont pas obtenues: soit $\varphi(i) = \varphi(i+1)$ pour un i, soit $n = m$, φ est l'identité, et $\varphi(0) = 0$.

3.11. Si X est une variété différentiable, que $F = \mathbb{R}$ et que, dans 3.7, on calcule la cohomologie de X^n à l'aide du complexe de de Rham, on obtient un objet simplicial $\Omega^p(X^n)$ de la catégorie des complexes (degré différentiel gradué p, degré simplicial n). Soit $N\Omega^*(X^*)$ son normalisé, et $\mathbf{s}N\Omega^* X^*$ le complexe simple associé, dont la composante de degré k est $\bigoplus_{p-n=k} N\Omega^p(X^k)$. C'est un proche cousin du complexe des intégrales itérées de Chen. Nous nous proposons d'expliquer la relation entre les deux.

Une q-forme β sur l'espace ${}_b\Omega_a(X)$ des chemins C^∞ de a à b est pour Chen la donnée, pour toute variété U et toute famille C^∞ $: U \to {}_b\Omega_a(X)$ de chemins de a à b paramétrée par U, d'une q-forme (notée $\gamma^*\beta$) sur U, cette donnée vérifiant que pour $f \colon V \to U$ on a $(\gamma f)^*\beta = f^*(\gamma^*\beta)$. A une p-forme sur X^n, Chen attache comme suit une $(p-n)$-forme sur ${}_b\Omega_a(X)$:

(a) répétant avec paramètres la construction de 3.8, on attache à une famille γ de chemins paramétrée par U un morphisme

$$\gamma_n = \gamma \circ \sigma_n \colon U \times |\Delta_n| \to U \times [0,1]^n \to X^n;$$

(b) à la forme α sur X^n on attache l'intégrale de $\gamma_n^*\alpha$ le long des fibres de $U \times |\Delta_n| \to U$. Plus précisément, on attache

$$\langle \alpha \rangle = (-1)^{n(n+1)/2} \int_{U \times |\Delta_n|/U} \gamma_n^* \alpha,$$

où l'intégrale le long des fibres est définie de sorte que pour β' sur U et β'' sur $|\Delta_n|$, on ait

$$\int_{U\times|\Delta_n|/U} \mathrm{pr}_1^*\beta' \wedge \mathrm{pr}_2^*\beta'' = \beta'.\int_{|\Delta_n|}\beta''.$$

Le signe est choisi pour avoir, si α est de degré p

$$d\left\langle \alpha \right\rangle = \left\langle d\alpha \right\rangle + (-1)^p \left\langle \sum (-1)^i j_i^* \alpha \right\rangle \ :$$

compatibilité de la différentielle extérieure sur ${}_b\Omega_a(X)$ avec la différentielle D du complexe simple associé au complexe double des $\Omega^*(X^n)$ (pour * le premier degré).

Pour la différentielle transposée de $\mathrm{Sing}_* X^*$, si γ est un chemin de a à b, c'est $\sum(-1)^p \gamma \circ \sigma_p$ qui est un cycle.

Chen remplace les $\Omega^* X^n$ par le système simplicial de sous-complexes $\overset{n}{\otimes}\,\Omega^*(X)$. Le *complexe des intégrale itérées* de Chen est l'image par $\langle\ \ \rangle$ de la somme des $\overset{n}{\otimes}\,\Omega^*(X)$. Cette image est formée des sommes de

$$\langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle := \langle \mathrm{pr}_1^* \alpha_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{pr}_n^* \alpha_n \rangle \,.$$

Les dégénérescences $s_i \colon X^n \to X^{n-1}$ sont les projections $(x_1 \dots x_n) \to (x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n)$ et le complexe normalisé de $\overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X$, dans sa version "diviser par les $\mathrm{Im}(s_i)$" est

(3.11.1) $$N \overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X = \overset{n}{\otimes}(\Omega^* X/\text{constantes}).$$

Par Künneth, les $\overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X$ sont quasi-isomorphes aux $\Omega^* X^n$, et donc les $N \overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X$ aux $N\Omega^* X^n$.

Si un des α_i est de degré 0, $\langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle$ est nul et $\langle\ \ \rangle$ induit donc

$$\langle\ \ \rangle \colon N \overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X \to \text{complexe des intégrales itérees.}$$

Les deux membres sont filtrés par n; par les $\underset{m \leq n}{\oplus} N \overset{m}{\otimes}\,\Omega^* X$ et leurs images. Chen (1973) (Lemme 4.3.1) prouve que, pour cette filtration Fil du complexe des intégrales itéries, $\mathrm{Gr}_n^{\mathrm{Fil}}$ est le quotient $\overset{n}{\otimes}(\tau_{\geq 1}\Omega^* X)$ de $\overset{n}{\otimes}\,\Omega^* X$. Le complexe $\tau_{\geq 1}\Omega^* X$ est le quotient de $\Omega^* X$ par

$\Omega^0 X$ et son image par d. La variété X étant connexe, le morphisme de $(\Omega^* X/\text{constantes})$ dans $\tau_{\geq 1}\Omega^* X$ est un quasi-isomorphisme, et les

$$\mathrm{Fil}_n N \overset{n}{\otimes} \Omega^* X \to \mathrm{Fil}_n(\text{intégrales itérées})$$

sont donc des quasi-isomorphismes.

Remarque. On peut donner du complexe des intégrales itérées une description directe, en terme de l'algèbre graduée $\Omega^*(X)$ et des morphismes d'évaluation en a et b, sans invoquer les formes différentielles sur ${}_b\Omega_a$: l'image de $\underset{m \leq n}{\oplus} \overset{m}{\otimes} \Omega^*_X$ est son quotient par les $\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_m$ tels qu'un α_i soit de degré 0, et leurs différentielles (construction bar réduite de Chen 1976).

3.12. Soit X une variété algébrique lisse connexe sur un corps k et $a, b \in X(k)$. Comme dans le cas topologique 3.6, le schéma cosimplicial $X^{\mathrm{Hom}(\Delta_n, \Delta_1)}$ s'envoie dans le schéma cosimplicial constant $X \times X = X^{\mathrm{Hom}(\Delta_n, \partial\Delta_1)}$ et, prenant la fibre en $(b, a) \in X \times X$, on obtient un schéma cosimplicial $\Delta_n \mapsto X^n$. Regardons-le comme un objet cosimplicial de la catégorie additive $\mathrm{SmCor}(k)$. Quel que soit n, on peut lui attacher le complexe

$$C^*(\Delta_n, X^*)[n]$$

(3.7) de $\mathrm{SmCor}(k)$, ou, dans l'enveloppe karoubienne $\mathrm{SmCor}(k)_{\mathrm{kar}}$ de $\mathrm{SmCor}(k)$, le complexe homotope $\sigma_{\leq n} N X^*$. Ces complexes fournissent des objets, naturellement isomorphes d'après 3.10, de la catégorie triangulée motivique $\mathrm{DM}(k)$. Notons-les ${}_b\Omega_a^{[n]}(X)$.

Appliquons à ${}_b\Omega_a^{[n]}(X)$ le foncteur “réalisation” cohomologique, suivi de H^0. D'après 3.4, pour tout plongement complexe σ de k, dans la réalisation de Betti H_σ correspondante (coefficients rationnels), on obtient $(\mathbb{Q}[{}_bP_a] \otimes_\Lambda \Lambda/I^{n+1})^\vee$ pour $X(\mathbb{C})$.

Supposons que X, comme objet de $\mathrm{DM}(k)$, soit de Tate mixte, i.e. dans $\mathrm{DMT}(k)$. Les ${}_b\Omega_a^{[n]}(X)$ sont alors également dans $\mathrm{DMT}(k)$. Si k est un corps de nombres, ou plus généralement quand on dispose de la conjecture d'annulation de Beilinson Soulé, on peut, après tensorisation avec $\mathbb{Q}$, appliquer H^0 et dualiser pour obtenir un objet de la catégorie $\mathrm{MT}(k)$ des motifs de Tate mixte sur k.

Si on travaille avec $\sigma_{\leq n} NX^*$, les formules classiques en topologie (voir Wojtkowiak (1993)) fournissent, après passage à la limite inductive en n, une structure d'algèbre commutative dans la catégorie des Ind-objets de $\mathrm{MT}(k)$, et

$$ {}_bA_a(X) := \operatorname*{colim}_n (H^0 \sigma_{\leq n} NX^*)^\vee $$

mérite le nom d'algèbre affine de l'espace motivique des chemins de a à b. Pour trois points a, b, c, on dispose aussi (loc. cit.)d'un coproduit

$$ {}_cA_a(X)(X) \to {}_cA_b(X) \otimes {}_bA_a(X) $$

correspondant à la composition des chemins. Pour $a = b$, $\mathrm{Spec}({}_aA_a(X))$ est le *groupe fondamental rendu unipotent motivique.*

3.13. Prenons pour X le complément, dans une droite projective P sur K, d'un ensemble fini de points rationnels, et montrons comment comparer ces constructions à celles de Deligne (1989). En réalisation de de Rham, X fournit le complexe (à différentielle nulle) des formes différentielles à pôles logarithmiques:

$$ K \xrightarrow{0} \Omega^1_P(\log S). \tag{3.13.1} $$

Pour X^n, on obtient la puissance tensorielle $n^{\text{ième}}$ de (3.13.1). Ces puissances tensorielles forment un système simplicial de complexes. Normalisant, ce qui revient à supprimer K dans (3.13.1) (cf. (3.11.1)), on obtient après troncation en n

$$ \bigoplus_{m \leq n} \Omega^1_p(\log S)^{\otimes m}. \tag{3.13.2} $$

La comparaison avec la réalisation de Betti est par les intégrales itérées de Chen, et ceci est compatible aux constructions de Deligne (1989). Quant à la réalisation en cohomologie ℓ-adique, les arguments prouvant 3.4 s'appliquent aussi bien dans le cadre ℓ-adique.

4. Le groupe fondamental unipotent motivique d'une variété rationnelle.

4.1. Soient k un corps de nombres, P une droite projective sur k, X le complément d'un ensemble fini S de points rationnels et $x, y \in X(k)$. Dans Deligne (1989) §13, nous avons défini un "espace de (classes d'homotopie de) chemins motivique" noté $P_{y,x}$. Sous les hypothèses ci-dessus, et après oubli de l'aspect cristallin de loc. cit., c'est un schéma affine en la catégorie tannakienne $\mathcal{R}^{H+\ell}$ de 2.15. Nous le noterons ici $P_{y,x}^{H+\ell}$, ou $P_{y,x}^{H+\ell}(X)$ s'il y a lieu de préciser X. On dispose d'une "composition des chemins" $P_{z,y}^{H+\ell} \times P_{y,x}^{H+\ell} \to P_{z,x}^{H+\ell}$. Posons $\pi_1^{H+\ell}(X, x) := P_{x,x}^{H+\ell}$. Pour la composition des chemins, c'est un $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma en groupes affine et $P_{y,x}^{H+\ell}$ est un espace principal homogène à droite sous $\pi_1^{H+\ell}(X, x)$, à gauche sous $\pi_1^{H+\ell}(X, y)$: un $(\pi_1^{H+\ell}(X, x), \pi_1^{H+\ell}(X, y))$-bitorseur. Pour σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de $\mathbb{R}$, la réalisation σ de $\pi_1^{H+\ell}(X, x)$ est l'enveloppe algébrique pro-unipotente de $\pi_1(X(C), x)$. Si I est l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[\pi_1(X(C), x)]$, c'est le spectre de l'algèbre de Hopf commutative

$$\operatorname{colim}(\mathbb{Q}[\pi_1(X(C), x)]/I^N)^\vee.$$

i.e. c'est l'enveloppe algébrique pro-unipotente de $\pi_1(X(C), x)$.

4.2. Soit $A_{y,x}^{H+\ell}$ l'algèbre affine (2.6) de $P_{y,x}^{H+\ell}$. D'après 3.12, 3.13, le Ind-objet $A_{y,x}^{H+\ell}$ de $\mathcal{R}^{H+\ell}$ est l'image par le foncteur réalisation d'un Ind-objet $A_{y,x}$ de $MT(k)$. D'après 2.14, 2.15 (ii), le produit $A_{y,x}^{H+\ell} \otimes A_{y,x}^{H+\ell} \to A_{y,x}^{H+\ell}$ provient d'un produit sur $A_{y,x}$, et $P_{y,x}^{H+\ell}$ est la réalisation du $MT(k)$-schéma affine $P_{y,x} := \operatorname{Spec}(A_{y,x})$. De même, la composition des chemins est définie par un coproduit $A_{z,x}^{H+\ell} \to A_{z,y}^{H+\ell} \otimes A_{y,x}^{H+\ell}$, ce coproduit se relève à $MT(k)$ et définit un morphisme $P_{z,y} \times P_{y,x} \to P_{z,x}$.

Nous appellerons ici $P_{y,x}$ l'*espace de chemins de x à y motivique*. Nous appelerons $P_{x,x}$ le groupe fondamental motivique de X en x et le noterons $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X, x)$ ou simplement $\pi_1(X, x)$. Mise en garde: bien que la notation ne l'indique pas, il s'agit de π_1 rendus unipotents.

4.3. Appelons "point base de X" soit un point rationnel de $X = P - S$, soit un vecteur tangent non nul en un point de S ("points base à l'infini"). Pour x et y deux points-base de X, Deligne (1989) §15 définit un "espace de chemins motivique de x à y". Comme en 4.1, c'est, après oubli d'un aspect cristallin, un $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma affine. Nous le noterons ici $P_{y,x}^{H+\ell}$, et, pour $x=y$, $\pi_1^{H+\ell}(X,x)$.

Théorème 4.4. *Avec les notations de 4.1 et 4.3, si x et y sont deux points-base de X, le $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma $P_{y,x}^{H+\ell}$ est motivique, i.e. la réalisation d'un $MT(k)$-schéma $P_{y,x}$.*

Si S est vide ou réduit à un point, $X = P - S$ est simplement connexe, les $P_{y,x}^{H+\ell}$ sont réduits à un point et 4.4 est trivial. Nous pouvons donc supposer, et supposerons, que $|S| \geq 2$. Le cas où x et y sont à distance finie ayant déjà été traité, nous supposerons au moins l'un de x et y à l'infini.

Cas 1. $x \in X(k)$ et y est un vecteur tangent non nul en $\bar{y} \in S$.

Soit Z le $\mathrm{MT}(k)$-schéma des homomorphismes de $\mathbb{Q}(1)$ dans $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X,x)$. Identifiant homomorphismes de schémas en groupe unipotents, et homomorphismes entre leurs algèbres de Lie, on peut en donner la description suivante: Lie $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X,x)$ est une pro-algèbre de Lie dans $MT(k)$, en particulier un pro-objet de $MT(k)$ (c'est la limite projective des Lie $(\pi_1^{\mathrm{mot}}(X,x)/\mathfrak{Z}^N)$, pour $\mathfrak{Z}$ la série centrale descendante), et on définit Z comme étant le $MT(k)$-schéma pro-vectoriel (2.6) Lie $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X,x)(-1)$.

Dans $Z^{H+\ell} := \mathrm{real}^{H+\ell}(Z)$, on dispose du sous-schéma fermé "classe de conjugaison de la monodromie locale autour de $\bar{y}$". Voici sa définition. Ecrivons $\mathbb{Q}(1)^{H+\ell}$ pour $\mathrm{real}^{H+\ell}(\mathbb{Q}(1))$. On dispose d'un morphisme "monodromie locale autour de $\bar{y}$":

$$\mathbb{Q}(1)^{H+\ell} \to \pi_1^{H+\ell}(X,y). \tag{4.4.1}$$

Dans (4.4.1), $\mathbb{Q}(1)^{H+\ell}$ est vu comme un $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma vectoriel, avec sa structure de groupe. Si $T_{\bar{y}}$ est l'espace tangent en $\bar{y}$, et que $T_{\bar{y}}^* := T_{\bar{y}} - \{0\}$, il y a lieu de voir (4.4.1) comme un morphisme

$$\pi_1^{H+\ell}(T_{\bar{y}}^*, y) \to \pi_1^{H+\ell}(X,y).$$

La donnée de (4.4.1) équivaut à celle de

$$\mathbb{Q}(1)^{H+\ell} \to \mathrm{Lie}\,\pi_1^{H+\ell}(X,y). \tag{4.4.2}$$

Dans (4.4.2), $\mathbb{Q}(1)^{H+\ell}$ est un objet de $\mathcal{R}^{H+\ell}$, muni de sa structure d'algèbre de Lie commutative.

On dispose aussi de l'espace de chemins $P^{H+\ell}_{y,x}$ et, par composition des chemins, de

$$(p,\gamma) \longmapsto p^{-1}\gamma p\colon P^{H+\ell}_{y,x} \times \pi_1^{H+\ell}(X,y) \to \pi_1^{H+\ell}(X,x).$$

Composant avec (4.4.1), on en déduit

$$P^{H+\ell}_{y,x} \times \mathbb{Q}(1)^{H+\ell} \to \pi_1^{H+\ell}(X,x). \tag{4.4.2}$$

Le groupe $\pi_1^{H+\ell}(X,y)$ agit par composition à gauche sur $P^{H+\ell}_{y,x}$. Divisant à gauche par $\mathbb{Q}(1)^{H+\ell}$, vu par (4.4.1) comme sous-groupe de $\pi_1^{H+\ell}(X,y)$, on définit

$$P^{H+\ell}_{\bar{y},x} := \mathbb{Q}(1)^{H+\ell} \setminus P^{H+\ell}_{y,x}$$

et (4.4.2) se factorise par $P^{H+\ell}_{\bar{y},x} \times \mathbb{Q}(1)^{H+\ell}$, définissant

$$P^{H+\ell}_{\bar{y},x} \to Z^{H+\ell} \tag{4.4.3}$$

Lemme 4.5. *Le morphisme (4.4.3) est un plongement fermé de $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schémas.*

Preuve. Il suffit de le vérifier en réalisation de de Rham, où l'assertion se réduit à la suivante.

Lemme 4.6. *Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie sur k engendrée par des éléments $(e_s)_{s\in S}$ soumis à la seule relation que $\sum e_s = 0$. On suppose $|S| \geq 2$, on fixe $\bar{y} \in S$ et on pose $e := e_{\bar{y}}$. Soit G le schéma en groupe prounipotent limite projective des $G_N := \exp(\mathcal{L}/\mathfrak{Z}^N)$. Le morphisme de $G/\exp(ke)$ dans $\mathrm{Lie}(G)$: $g \mapsto \mathrm{ad}\, g(e)$, identifie $G/\exp(ke)$ à un sous-schéma fermé de $\mathrm{Lie}(G)$, l'orbite adjointe de e.*

Dans 4.6, $\mathrm{Lie}(G)$ est le schéma pro-vectoriel limite projective des schémas vectoriels $\mathrm{Lie}(G_N)$.

Preuve. Les orbites de l'action d'un groupe unipotent sur un schéma affine sont fermées Demazure, Gabriel (1970) IV 2.2.7). Si e_N est l'image de e dans $\mathcal{L}/\mathfrak{Z}^N$ et $Z_N \subset G_N$ son fixateur, l'application $g \mapsto \operatorname{ad} g(e_N)$ de G_N/Z_N dans $\operatorname{Lie}(G_N)$ est donc un plongement fermé. Par passage à la limite projective, l'application $g \mapsto \operatorname{ad} g(e)$ de $\lim G_N/Z_N$ dans $\operatorname{Lie}(G) = \lim \operatorname{Lie}(G_N)$ est également un plongement fermé.

L'algèbre de Lie du sous-groupe Z_N de G_N est le centralisateur de e_N dans $\mathfrak{L}/\mathfrak{Z}^N$. Fixons b dans S distinct de $\bar{y}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ est librement engendrée par les e_s ($s \neq b$). D'après 4.7 ci-dessous, le centralisateur de e est réduit à ke. Munissons $\mathfrak{L}$ de la graduation pour laquelle les e_s sont de degré 1. La sous-algèbre $\mathfrak{Z}^N$ est la sous-algèbre "degré $\geq N$". L'application linéaire $\operatorname{ad} e\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ étant de degré 1 et de noyau réduit à ke, on a

$$\operatorname{Lie} Z_N = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} e_N\colon \mathfrak{L}/\mathfrak{Z}^N \to \mathfrak{L}/\mathfrak{Z}^N) = ke_N + \mathfrak{Z}^{N-1}/\mathfrak{Z}^N.$$

La projection de G_{N+1}/Z_{N+1} sur G_N/Z_N se factorise donc par $G_N/\exp(ke_N)$ et

$$G/\exp(ke) = \lim G_N/\exp(ke_N) \xrightarrow{\sim} \lim G_N/Z_N(e).$$

Lemme 4.7. *Dans une algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}$ sur k, le centralisateur d'un générateur e est réduit aux multiples de ce générateur.*

D'après Reutenauer (1993) 2.10, dans une algèbre de Lie libre, deux éléments non nuls quelconques qui commutent sont multiples l'un de l'autre. Le cas particulier 4.7 est, plus simplement, conséquence de ce que l'algèbre de Lie libre $\operatorname{Lib}(\{e\} \cup A)$ est le produit semi-direct de ke et de $\operatorname{Lib}((\operatorname{ad} e^n(a))_{a \in A, n \geq 0}$ et de ce que la dérivation $\operatorname{ad} e^n(a) \mapsto \operatorname{ad} e^{n+1}(a)$ de l'algèbre associative libre engendrée par les $\operatorname{ad} e^n(a)$ est injective.

Il résulte de 4.5 que $P^{H+\ell}_{\bar{y},x}$ est motivique. Soient en effet A l'algèbre de Z et $A^{H+\ell} := \operatorname{real}^{H+\ell}(A)$ celle de $Z^{H+\ell}$. D'après 4.5, $P^{H+\ell}_{\bar{y},x}$ est isomorphe à un sous-schéma fermé de $Z^{H+\ell}$, défini par un idéal $a^{H+\ell}$ de $A^{H+\ell}$. D'après 2.14, 2.15, cet idéal est la réalisation d'un idéal a de A, et $P^{H+\ell}_{\bar{y},x}$ est isomorphe à la réalisation de $\operatorname{Spec}(A/a)$.

4.8 Fin du cas 1 de la preuve de 4.4. Soit $b \in S$ distinct de $\bar{y}$, et $X' := P - \{\bar{y}, b\}$. Identifions $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^1$, par un isomorphisme envoyant $\bar{y}$ sur 0 et b sur ∞, donc X' sur $A^* = \operatorname{Spec} k[u, u^{-1}]$. Soit $t := du\ (y)$ la coordonnée du vecteur tangent y en $u = 0$, et notons encore t le point de $\mathbb{G}_m$ de coordonnée t. Les espaces de chemins $P^{H+\ell}_{y,x}(X')$ et $P^{H+\ell}_{t,x}(\mathbb{G}_m)$

sont canoniquement isomorphes (Deligne (1989) §14). Puisque t et x sont des points-base à distance finie de $\mathbb{G}_m$, $P_{y,x}^{H+\ell}$ est motivique. C'est d'ailleurs simplement un torseur de Kummer: on a $\pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{G}_m, x) = \mathbb{Q}(1)$, $t/x \in k^*$ définit une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(1)$, donc un $\mathbb{Q}(1)$-torseur, et $P_{y,x}^{H+\ell}$ est la réalisation de ce torseur.

Lemme 4.9. *Le morphisme*

$$P_{y,x}^{H+\ell}(X) \to P_{y,x}^{H+\ell}(X') \times P_{\bar{y},x}^{H+\ell}(X)$$

(1^{en} *facteur: fonctorialité en* X*;* 2^{e} *facteur: passage au quotient*) *est un isomorphisme.*

Puisque tant $P_{y,x}^{H+\ell}(X')$ que $P_{\bar{y},x}^{H+\ell}(X)$ sont motiviques 4.9 implique que $P_{y,x}^{H+\ell}(X)$ est motivique.

Preuve de 4.9. Il suffit de vérifier 4.9 en réalisation de de Rham. Avec les notations de 3.6, l'assertion se réduit à la suivante.

Lemme 4.10. *Regardons* $\mathbb{G}_a = \exp(ke)$ *comme un quotient de* G *par* $e \mapsto e$, $e_a \mapsto 0$ *pour* $a \neq \bar{y}, b$. *L'application*

$$G \to \exp(ke) \times \exp(ke) \setminus G$$

est un isomorphisme.

Preuve. G est le produit semi-direct de $\exp(ke)$ par le noyau de la projection sur $\exp(ke)$, cf. la preuve de 4.7.

4.11. Pour finir la preuve de 4.4 il reste, compte tenu de ce que $P_{y,x}^{H+\ell}$, est isomorphe comme $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma à $P_{x,y}^{H+\ell}$, à traiter le

Cas 2. x et y sont des points base à l'infini.

Choisissons un point base $z \in X(k)$. On a une expression de $P_{y,x}^{H+\ell}$ comme composé de bitorseurs

$$P_{y,x}^{H+\ell} = P_{y,z}^{H+\ell} \times_{\pi_1^{H+\ell}(X,z)} P_{z,x}^{H+\ell}$$

où au second membre chaque $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma est motivique. Que $P_{y,x}^{H+\ell}$ soit motivique en résulte.

4.12. Soit X une variété algébrique lisse sur un corps de nombres k, et $x, y \in X(k)$. On suppose X séparé. Sous l'hypothèse que $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}) = 0$ pour $\bar{X}$ une compactification lisse de X, nous avons défini dans Deligne (1989) §13 un "espace de chemins" $P_{y,x}$ qui est un schéma en une catégorie de systèmes de réalisations. Nous le noterons ici, après omission de l'aspect cristallin, $P_{y,x}^{\mathrm{real}}$. Comme précédemment, les $P_{y,x}^{\mathrm{real}}$ forment un groupoïde.

Théorème 4.13. *Si la variété X est unirationnelle, $P_{y,x}^{\mathrm{real}}$ est motivique, réalisation d'un* $\mathrm{MAT}(k)$*-schéma.*

Les catégories de systèmes de réalisations considérés sont des champs sur $\mathrm{Spec}(k)_{\mathrm{et}}$. Le théorème équivaut donc à dire qu'il existe une extension galoisienne k_1 de k telle qu'après extension du corps de base à k' dans $\mathcal{C}(k_1/k)$, $P_{y,x}^{\mathrm{real}}(X_{k'})$ est motivique, réalisation d'un $\mathrm{MT}(k')$-schéma.

Preuve pour X un ouvert de $\mathbb{P}^n$. Soit $D \subset \mathbb{P}^n$ une droite, assez générale pour que le morphisme de schémas en groupe unipotents

$$\pi_1^{\mathrm{real}}(X \cap D, x) \to \pi_1^{\mathrm{real}}(X, x)$$

(x quelconque dans $X \cap D$) soit surjectif.

Si $X \cap D$ est le complément dans D d'un ensemble fini de points rationnels, $\pi_1^{\mathrm{real}}(X \cap D, x)$ est dans $\mathcal{R}^{H+\ell}$ et, d'après 4.4, motivique, réalisation de $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X \cap D, x)$ dans $MT(k)$. L'algèbre affine de $\pi_1^{\mathrm{real}}(X, x)$ est une sous-algèbre de celle de $\pi_1^{\mathrm{real}}(X \cap D, x)$, donc est également motivique, dans $MT(k)$. En général, pour k' assez grand (i.e., dans un $\mathcal{C}(k_1/k)$ convenable), $X \cap D$ deviendra après extension du corps de base de k à k' le complément d'un ensemble de points rationnels sur k', et la construction ci-dessus nous fournit $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X_{k'}, x)$ dans $MT(k')$, fonctoriel en k', i.e. $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X, x)$ dans $\mathrm{MAT}(k)$.

Soit $y \in X(k)$, distinct de x. Prouvons que $P_{y,x}^{\mathrm{real}}$ est motivique. Soit D la droite de $\mathbb{P}^n$ passant par x et y. Comme précédemment, on se ramène à supposer que $X \cap D$ est le complément, dans D, d'un ensemble fini de points rationnels. Le $\mathcal{R}^{H+\ell}$-schéma $P_{y,x}^{\mathrm{real}}(X \cap D)$ est alors la réalisation de $P_{y,x}^{\mathrm{mot}}(X \cap D)$ dans $\mathrm{MT}(k)$. On obtient $P_{y,x}^{\mathrm{mot}}(X)$ en poussant le

$\pi_1(D \cap X, x)$-torseur $P^{\text{mot}}_{y,x}(D \cap X)$ par

$$\pi_1(D \cap X, x) \to \pi_1(X, x).$$

Pour $y, z \in X(k)$, $P^{\text{mot}}_{y,z}$ est déduit des $\pi_1^{\text{mot}}(X, x)$-torseurs $P^{\text{mot}}_{y,x}$ et $P^{\text{mot}}_{z,x}$.

Preuve de 4.13 (cas général)**.** La variété X, étant unirationnelle, est dominée par un ouvert U de $\mathbb{P}^n$. Fixons $x \in U(k)$. Pour σ un plongement complexe de k, le morphisme $\pi_1(U(\mathbb{C}), x) \to \pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ a une image d'indice fini. Le morphisme induit sur les enveloppes algébriques unipotentes est donc surjectif, et l'algèbre affine de $\pi_1^{\text{real}}(X, x)$ est motivique en tant que sous-algèbre de l'algèbre affine de $\pi_1^{\text{real}}(X, x)$, que nous savons déjà être motivique. Le cas des $P_{y,x}$ se traite ensuite comme plus haut, en utilisant que deux points de X peuvent être connectés par une chaîne de courbes rationnelles.

Remarque 4.14. Utilisant 4.4, on pourrait aussi dans 4.13 prendre pour x et y des points-base à l'infini, au sens de Deligne (1989) §15.

Proposition 4.15. *Supposons que $\bar{X}$ soit une compactification normale de la variété unirationnelle X, et soient $x, y \in X$. Si les composantes irréductibles de codimension un dans X de $Y := \bar{X} - X$ sont absolument irréductibles, alors $P^{\text{mot}}_{y,x}$ est un* $\mathrm{MT}(k)$*-schéma.*

Preuve. Supposons d'abord que $x = y$. Pour que $\pi_1(X, x)$ soit un $\mathrm{MT}(k)$-schéma il suffit que $\mathrm{Lie}\,\pi_1(X, x)$ soit dans $\mathrm{MT}(k)$. D'après 2.18, il suffit même que son gradué par le poids le soit. Ce gradué étant engendré par $H_1(X)$, purement de poids -2, il suffit que l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\omega H_1(X)$ soit triviale. Ce groupe est

$$\mathcal{O}^*(X_{\bar{k}})/\bar{k}^* \otimes \mathbb{Q}$$

et ses éléments sont déterminés par leurs valuations le long des composantes irréductibles de codimension un de $Y_{\bar{k}}$. Si le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ ne les permute pas, il agit donc trivialement sur $\mathcal{O}^*(X_{\bar{k}})/\bar{k}^* \otimes \mathbb{Q}$.

Le cas général résulte du

Lemme 4.16. *Si un* $\mathrm{MAT}(k)$*-schéma* P *est un torseur sous un* $\mathrm{MT}(k)$*-schéma en groupes unipotent* G*, il est lui-même un* $\mathrm{MT}(k)$*-schéma.*

Preuve. Le groupe G étant unipotent, si on le fait agir sur son algèbre affine A par translations à droite, celle-ci admet une filtrations exhaustive Fil par des sous-motifs stables sous G, et tels que G agisse trivialement sur le gradué associé. L'algèbre affine A_P de P, déduite de A en poussant par le G-torseur P, admet donc une filtration, encore notée Fil, telle que $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Fil}}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}^{\mathrm{Fil}}(A_P)$. Il reste à appliquer 2.18.

Proposition 4.17. *Soit* S *un ensemble fini de places finies de* k *et supposons que la variété unirationnelle* X *est la fibre générale du complément* $X_{\mathcal{O}}$*, dans* $\bar{X}_{\mathcal{O}}$ *propre et lisse sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S)$*, d'un diviseur à croisements normaux relatif, réunion de diviseurs lisses, chacun de fibre générale absolument irréductible. Si* x *et* y *dans* $X(k)$ *proviennent de* $x_{\mathcal{O}}$*,* $y_{\mathcal{O}}$ *dans* $X_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_S)$*, alors* $P^{\mathrm{mot}}_{y,x}$ *est dans* $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$*.*

Preuve. Pour tout nombre premier ℓ, l'hypothèse assure que la réalisation ℓ-adique de $P^{\mathrm{mot}}_{y,x}$ est non ramifiée en dehors de S et des places au-dessus de ℓ, et on applique 1.8.

4.18 Remarque. Un énoncé analogue vaut pour x ou y à l'infini.

4.19. Soit X une variété lisse unirationnelle sur un corps de nombres k. Le théorème 4.13 permet de définir la catégorie $\mathrm{MAT}(X/k)$ des *systèmes locaux unipotents de motifs d'Artin-Tate mixte* sur X. On choisit $x \in X(k)$ et on définit un objet M de $\mathrm{MAT}(X/k)$ comme étant la donnée de M_x dans $\mathrm{MAT}(k)$ muni d'une action de $\pi_1(X,x)$. Il y a lieu de voir M_x comme étant la fibre de M en x. Le choix de x n'importe pas: pour y dans $X(k)$, on définit M_y comme étant le tordu de M_x par le $\pi_1(X,x)$-torseur $P_{y,x}$. Il reviendrait au même de définir $\mathrm{MAT}(X/k)$ comme la catégorie des représentations, dans $\mathrm{MAT}(k)$, du groupoïde des $P_{y,x}$ pour $x, y \in X(k)$. On pourrait aussi prendre des points base à l'infini.

Puisque $\mathrm{Lie}\,\pi_1(X,x)$ est en poids < 0, $\pi_1(X,x)$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}^W(M_x)$ et, pour x et y deux points base de X, $\mathrm{Gr}^W(M_x)$ et $\mathrm{Gr}^W(M_y)$ sont canoniquement isomorphes. Le foncteur fibre $\omega(M) := \omega(M_x)$ est donc indépendant de x. On définit la sous-catégorie $\mathrm{MT}(X)$ de $\mathrm{MAT}(X/k)$ par la condition "M_x est dans $\mathrm{MT}(k)$". Le choix de x n'importe pas (2.18).

4.20. Soit σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de $\mathbb{R}$. Pour M dans $\mathrm{MAT}(X/k)$, $(M_x)_\sigma$ est une structure de Hodge-Tate mixte, munie d'une action de Hodge mixte de $\pi_1(X,x)_\sigma$. D'après Hain and Zucker (1987) (5.21), ces données définissent une variation admissible M_σ de structures de Hodge mixtes sur $X(C)$.

Le torseur $(P_{y,x})_\sigma$ tord $(M_\sigma)_x$ en $(M_\sigma)_y$ et la variation M_σ ne dépend donc pas du choix de x.

De même, M définit un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse sur X.

4.21. Réciproquement, supposons donné sur X un système de réalisations M, candidat à être la réalisation d'un système local unipotent de motifs de Tate mixte, de gradué par le poids constant. Alors, si en un point x de X ce système est motivique, il est lui-même motivique. En effet, dans les diverses réalisations, il définit une représentation de $\pi_1(X,x)$. Appliquant 2.14, on obtient une représentation de $\pi_1^{\mathrm{mot}}(X,x)$ sur le motif de réalisation M_x, et cette représentation définit le système local voulu.

4.22. Si K est le corps des fonctions rationnelles sur X, il est raisonnable de définir $\mathrm{MT}(K)$ comme la limite inductive des catégories $\mathrm{MT}(U)$, pour U un ouvert non vide de plus en plus petit de X. La relation entre cette catégorie et la catégorie dérivée motivique $\mathrm{DM}(K)$ de Voevodsky n'est pas claire. Faute de disposer de la conjecture d'annulation de Beilinson Soulé pour K, on ne sait pas extraire de $\mathrm{DM}(K)$ une catégorie abélienne de motifs de Tate mixte sur K. Pour X rationnelle de dimension un, la conjecture d'annulation est vraie, mais nous n'avons pas prouvé l'équivalence des deux constructions. Pour la catégorie $\mathrm{MT}(K)$ définie ici, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(1)) = K^*\otimes\mathbb{Q} && \text{et} \\ &\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0),\mathbb{Q}(n)) = K_{2n-1}(k) && \text{pour } n\geq 2 \end{aligned}$$

(une extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$ n'a pas de modules si $n\geq 2$).

4.23 Remarque. Soit $\bar{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et définissons $\mathrm{MT}(\bar{\mathbb{Q}})$ comme la limite inductive des $\mathrm{MT}(F)$, pour F une extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Goncharov (1994) conjecture que, dans cette limite, les $P_{y,x}(\mathbb{P}^1-S)$ engendrent tous les motifs de Tate mixte.

En d'autres termes: que tout motif de Tate mixte sur $\bar{\mathbb{Q}}$ est un sous-quotient d'un produit tensoriel de sous-motifs d'algèbres affines $\mathcal{O}(P_{y,x}(\mathbb{P}^1 - S))$ et de duaux de tels sous-motifs.

Les remarques suivantes montrent qu'il est en tout cas difficile de sortir de la sous-catégorie tannakienne $\mathcal{T}$ de $\mathrm{MT}(\bar{\mathbb{Q}})$ engendrée par les $P_{y,x}(\mathbb{P}^1 - S)$.

(a) Pour X lisse unirationnelle, les $P_{y,x}(X)$ sont dans $\mathcal{T}$. Cela résulte de la preuve de 4.13.

(b) Si M est un système local unipotent de motifs de Tate mixte sur X lisse unirationnelle, et si en un point M est dans $\mathcal{T}$, alors M est en chaque point dans $\mathcal{T}$. En effet, M_y est tordu de M_x par $P_{y,x}$. Il se plonge donc dans $M_x \otimes \mathcal{O}(P_{y,x})$, et est dans $\mathcal{T}$ puisque M_x et $\mathcal{O}(P_{y,x})$ le sont.

5. Le groupe fondamental motivique du complément, dans $\mathbb{P}^1$, de 0, ∞, et μ_N.

5.1. Soient N un entier ≥ 1, k engendré sur $\mathbb{Q}$ par une racine primitive $N^{\text{ième}}$ de l'unité et $\mathcal{O}$ l'anneau de ses entiers. Il est commode de ne pas supposer que k soit le sous-corps $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/N))$ de $\mathbb{C}$. Soit Γ le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{O}[1/N])^*\otimes\mathbb{Q}$ engendré par les $1-\zeta$ pour ζ une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité autre que 1. Pour N puissance d'un nombre premier, il coïncide avec $\mathcal{O}[1/N]^* \otimes \mathbb{Q}$. Pour N quelconque, il est somme directe de $\mathcal{O}^* \otimes \mathbb{Q}$ et du sous-espace vectoriel engendré par les diviseurs premiers de N. Le groupe fondamental (2.7) de $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/N]) := \mathrm{MT}(k)_{\mathcal{O}[1/N]^*\otimes\mathbb{Q}}$ (resp. de sa sous-catégorie $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$) sera noté $G^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ (resp. G). L'action de ce groupe sur $\mathbb{Q}(1)$ définit un morphisme dans $\mathbb{G}_m$, dont le noyau 2.8 (b) sera noté $U^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ (resp. U).

Soit X le complément dans la droite projective $\mathbb{P}^1$ sur k de 0, ∞ et du groupe μ_N des racines $N^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Le groupe diédral $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mu_N$ agit sur X: le générateur de $\mathbb{Z}/2$ agit par $u \mapsto u^{-1}$, et $\xi \in \mu_N$ agit par $u \mapsto \xi u$. Pour $N = 1, 2$ ou 4, le groupe des projectivités transformant X en lui-même est plus grand. Pour $N = 1$, il s'identifie au groupe des permutations de $\{0, 1, \infty\}$. Pour $N = 2$, $(0, \infty, 1, -1)$ est un quaterne harmonique, et on obtient le groupe des automorphismes d'un carré de sommets consécutifs 0, 1, ∞, -1. Pour $N = 4$, les points 0, 1, i, -1, $-i$, ∞ forment sur la sphère de Riemann les sommets d'un octaèdre, et on obtient le groupe des déplacements de cet octaèdre.

5.2. Si x et y sont deux points-base (4.3) de X, l'espace de chemins motivique $P_{y,x}$ est un $\mathrm{MT}(k)$-schéma affine (4.4). La réalisation ω de $P_{y,x}$ est indépendante de x et y. C'est un $\mathbb{Q}$-schéma en groupe pro-unipotent, et la composition des chemins est la loi de groupe. Autre façon de dire: en réalisation ω, il y a un chemin canonique de x à y, et le composé des chemins canoniques de x à y et de y à z est le chemin canonique de x à z. Bien sûr, cette trivialisation du $\omega(\pi_1(X, x))$-torseur $\omega(P_{y,x})$ n'est en général pas motivique, i.e. ne provient pas d'une trivialisation du $\pi_1(X, x)$-torseur $P_{y,x}$. L'action sur $\omega(P_{y,x})$ du groupe des automorphismes du foncteur fibre ω dépend de x et y.

5.3. Pour z dans $\mathbb{P}^1_k - \{\infty\}$ et λ dans k nous noterons λ_z le vecteur tangent en z de coordonnée $du(\lambda_z) = \lambda$. Nous noterons λ_∞ le vecteur tangent en ∞ de coordonnée

$du^{-1}(\lambda_\infty) = \lambda$.

Nous prendrons comme points-base les λ_z pour $z = 0$, ∞ ou dans μ_N et λ une racine de l'unité dans k. Ce système de points-base est stable sous l'action du groupe diédral $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mu_N$. Une application de 1.8 montre comme en 4.17, 4.18 que les $P_{y,x}$ correspondants sont non ramifiés en dehors de l'ensemble des places de k au-dessus d'un nombre premier divisant N: ce sont des $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/N])$-schémas. Nous verrons en 5.11 que ce sont même des $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$-schémas.

Nous décrivons en 5.4 des structures sur le système des $P_{y,x}$. Pour toutes ces structures, il suffit pour les construire de les construire dans $\mathcal{R}^{H+\ell}$, ce qui est fait dans Deligne (1989), et d'appliquer 2.14.

5.4. Soient T une droite (schéma vectoriel de dimension un) et $T^* = T - \{0\}$. Le π_1 motivique de T^* est abélien, indépendant du point-base. C'est $\mathbb{Q}(1)$. Plus précisément, c'est le schéma motivique vectoriel $\mathbb{Q}(1)$ (2.6). Pour $x \in T^*(k)$, l'application $\lambda \mapsto \lambda x$ est un isomorphisme de la droite standard A avec T. Pour $y \in T^*(k)$, il induit un isomorphisme de $\mathbb{Q}(1)$-torseurs de $P_{y/x,1}(A^*)$ avec $P_{y,x}(T^*)$. Le $\mathbb{Q}(1)$-torseur $P_{t,1}(A^*)$ est le *torseur de Kummer* $K(t)$, et la composition des chemins fournit un isomorphisme de torseurs $K(tu) = K(t) + K(u)$.

En particulier, si $\alpha \in k^*$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, elle fournit une trivialisation de $nK(\alpha)$ et, puisque la multiplication par n est un automorphisme de $\mathbb{Q}(1)$, par division, une trivialisation de $K(\alpha)$. Pour $x \in T^*(k)$ et α une racine de l'unité, le $\mathbb{Q}(1)$-torseur $P_{\alpha x,x}$ est ainsi trivialisé: on dispose d'un chemin motivique de x à αx.

Prenons pour T l'espace tangent à $\mathbb{P}^1$ en 0, ∞ ou en $\zeta \in \mu_N$. Le groupoïde des $P_{y,x}(T^*)$, pour $x, y \in T^*(k)$, s'envoie dans le groupoïde des $P_{y,x}(X)$. Pour $x \in T^*(k)$, ceci définit la *monodromie locale*

$$\mathbb{Q}(1) = P_{x,x}(T^*) \to P_{x,x}(X). \tag{5.4.1}$$

Pour α une racine de l'unité, la trivialité du torseur $P_{\alpha x,x}(T^*) = K(\alpha)$ fournit un chemin motivique de x à αx dans X: une trivialisation du $\pi_1(X,x)$-torseur $P_{\alpha x,x}(X)$.

Pour le système de points base λ_z de 5.3, P_{λ_y,μ_x} ne dépend donc que de x et y, et on écrira simplement $P_{y,x}$ pour P_{λ_y,μ_x}. La composition des chemins fait de ces $P_{y,x}$ $(x, y \in \{0, \infty\} \cup \mu_N)$ un groupoïde.

5.5. Nous aurons à considérer des structures déduites de 5.4, sur $\mathbb{Q}(1)$ et les $P_{y,x}$. Pour qu'il n'y ait pas pas d'ambiguïté sur ce que "automorphisme" veut dire, il nous faut préciser les espèces de structures. Elles seront du type suivant, ayant un sens dans toute catégorie tannakienne $\mathcal{T}$, et supposent la donnée d'un ensemble E et d'un groupe A agissant sur E: la donnée d'un objet L de rang un, de $\mathcal{T}$-schémas $\pi_{y,x}$ $(x, y \in E)$ et de

(A) lois de composition $\pi_{z,y} \times \pi_{y,x} \to \pi_{z,x}$, faisant des $\pi_{y,x}$ un groupoïde;

(B) pour chaque x, un morphisme de groupes de L (plutôt du schéma vectoriel L (2.6)) dans $\pi_{x,x}$;

(C) une A-équivariance.

Deux cas nous importent:

(5.5.1) une structure (A) (B) (C) pour $E = \{0, \infty\} \cup \mu_N$ et pour A le groupe diédral $\mathbb{Z}/2 \ltimes \mu_N$ agissant comme en 5.1;

(5.5.2) une structure (A) (B) (C) pour $E = \{0\} \cup \mu_N$ et pour A le groupe μ_N agissant comme en 5.1.

La donnée d'un groupoïde comme en (5.5.2)(A) équivaut à celle des groupes $\pi_{x,x}$ et des seuls $\pi_{\zeta,0}$ $(\zeta \in \mu_N)$, munis d'actions à gauche de $\pi_{\zeta,\zeta}$ et à droite de $\pi_{0,0}$ qui en font un bitorseur: on récupère $\pi_{0,\zeta}$ comme étant le bitorseur inverse de $\pi_{\zeta,0}$, et $\pi_{\eta,\zeta}$ comme étant le composé $\pi_{\eta,0}\pi_{0,\zeta}$. On pourrait donner seulement $\pi_{0,0}$ et les $\pi_{0,0}$-torseurs $\pi_{\zeta,0}$, et récupérer $\pi_{\zeta,\zeta}$ comme étant le tordu de $\pi_{0,0}$ par le $\pi_{0,0}$-torseur $\pi_{\zeta,0}$ pour l'action intérieure de $\pi_{0,0}$ sur lui-même. Le groupe μ_N agit sur $\pi_{0,0}$ et la donnée du système équivariant des $\sum_\zeta = (\pi_{\zeta,\zeta}$, bitorseur $\pi_{\zeta,0}, L \to \pi_{\zeta,\zeta})$ équivaut à la donnée du seul $\sum_1$. La donnée d'une structure (5.5.2) équivaut donc à celle de la struture du type suivant qui s'en déduit:

(5.5.3) la donnée d'un objet L de rang un, de $\mathcal{T}$-schémas $\pi_{y,x}$ pour $x, y \in \{0, 1\}$, de (A) (B) comme ci-dessus, et de

(C') une action de μ_N sur $\pi_{0,0}$ qui fixe le morphisme $L \to \pi_{0,0}$.

Variante: donner seulement L, le groupe $\pi_{0,0}$, le $\pi_{0,0}$-torseur $\pi_{1,0}$ et définir $\pi_{1,1}$ par torsion pour donner un sens à (B).

D'une structure (5.5.*) on en déduit d'autres par passages au quotient. La donnée d'un quotient $\bar{\pi}$ du groupoïde π des $\pi_{y,x}$ équivaut à celle du quotient $\bar{\pi}_{0,0}$ du groupe $\pi_{0,0}$: les $\bar{\pi}_{0,0}$-torseurs $\bar{\pi}_{x,0}$, qui suffisent à décrire $\bar{\pi}$, sont déduits des $\pi_{0,0}$-torseurs $\pi_{x,0}$ en poussant par $\pi_{0,0} \to \bar{\pi}_{0,0}$. La structure (B) passe au quotient. Si le passage au quotient est par un sous-groupe de la série centrale descendante – plus généralement par des sous-groupes caractéristiques – l'équivariance (C) passe au quotient. Cas particulier: π^{ab}, obtenu par passage au quotient par le sous-groupe des commutateurs.

5.6. Un foncteur fibre F de $\mathcal{T}$ dans les espaces vectoriels sur un corps C transforme une structure s d'espèce (5.5.*) dans $\mathcal{T}$ en une structure analogue sur C, "$\mathcal{T}$-schéma" devenant "schéma affine sur C". Pour toute C-algèbre R, on en déduit une structure $F(s)_R$ sur $\mathrm{Spec}(R)$ et le groupe des automorphismes de $F(s)_R$ est fonctoriel en R. Dans les cas que nous aurons à considérer, le foncteur $R \mapsto \mathrm{Aut}(F(s))_R$ sera représentable, représenté par un schéma en groupes affine $Aut(F(s))$ sur C. Sa formation est compatible aux extensions de scalaires C'/C, et $Aut(F(s))$ est donc, fonctoriellement en F, l'image par F d'un $\mathcal{T}$-schéma en groupes $F(s)$, qu'on notera $Aut(s)$. Si on note par un indice F l'image par F, on a donc

$$Aut(s_F) = Aut(s)_F. \tag{5.6.1}$$

Le groupe fondamental $G\langle\mathcal{T}\rangle$ de $\mathcal{T}$ agit sur tout objet de $\mathcal{T}$, et respecte toute structure définie par des morphismes entre produits tensoriels. Pour s une structure d'espèce (5.5.*), l'action de $G\langle\mathcal{T}\rangle$ sur L et les $\pi_{y,x}$ se factorise donc par $Aut(s)$, définissant

$$G\langle\mathcal{T}\rangle \longrightarrow Aut(s). \tag{5.6.2}$$

5.7. Sur $\mathbb{Q}(1)$ et le système des $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/N])$-schémas $P_{y,x}$ de 5.4 (in fine), on dispose de la structure d'espèce (5.5.1) suivante:

(5.7.1) (A) composition des chemins (B) monodromies locales (5.4.1) (C) équivariance déduite de l'action du groupe diédral sur X.

On notera (5.7.2) et (5.7.3) les structures d'espèce (5.5.2) et (5.5.3) déduites de (5.7.1). On notera avec $/\mathfrak{Z}^n$ celles qui s'en déduisent par passage au quotient par un sous-groupe de la série centrale descendante (cf. 5.5), et avec ... en indice celles qui s'en déduisent par application du foncteur fibre ... .

Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie engendrée par des générateurs e_x, $x \in \{0, \infty\} \cup \mu_N$, soumis à la seule relation que $\sum e_x = 0$. On la gradue en donnant aux e_x le degré un. Elle est librement engendrée par les e_x, $x \neq \infty$. Soit $\prod$ le groupe pro-unipotent lim $\exp(\mathcal{L}/\text{degré } \geq n)$ (notation de A4). L'algèbre de Lie de $\prod$ est le complété $\mathcal{L}^\wedge := \prod\limits_n \mathcal{L}_n$ de $\mathcal{L}$.

D'après 5.2, $(5.7.1)_\omega$ est la structure d'espèce (5.5.1) suivante sur $\mathbb{Q} = \omega(\mathbb{Q}(1))$ et une famille de copies $\prod_{y,x}$ de $\prod = \omega(P_{y,x})$:

(A) la loi de groupe de $\prod$;

(B) le morphisme du groupe additif $\mathbb{G}_a$ (= le schéma vectoriel $\mathbb{Q}$) dans $\prod$ qui induit $1 \to e_x$ sur les algèbres de Lie;

(C) l'équivariance évidente: σ dans le groupe diédral envoie $\prod_{y,x} = \prod$ dans $\prod_{\sigma y, \sigma x} = \prod$ par le morphisme de groupes $[\sigma]$ de $\prod$ dans $\prod$ induisant $e_z \mapsto e_{\sigma z}$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{L}^\wedge$ de $\prod$.

Puisque ω est à valeurs dans les espaces vectoriels gradués, $\omega(\mathbb{Q}(1)) = \mathbb{Q}$ et les algèbres affines des $\omega(P_{y,lx}) = \prod$ sont graduées; $\mathbb{Q}$ est de degré un, et la graduation des algèbres affines est déduite de la graduation de $\mathcal{L}$.

5.8. Les $\omega(P_{x,x})/\mathfrak{Z}^n$ de $(5.7.1)_\omega/\mathfrak{Z}^n = ((5.7.1)/\mathfrak{Z}^n)_\omega$ sont des groupes algébriques unipotents. C'est clair sur 5.7. On en déduit la même assertion pour tout foncteur fibre F sur $\mathrm{MT}(\mathcal{O}(1/N))$. Le groupe des automorphismes du groupe algébrique $F(P_{x,x})/\mathfrak{Z}^n$ coïncide donc avec celui de son algèbre de Lie et est un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(F(P_{x,x})/\mathfrak{Z}^n))$. On en déduit par des arguments standard que $Aut((5.7.*)_F/\mathfrak{Z}^n)$ de 5.6 est défini, puis que $Aut((5.7.*)_F)$ l'est: c'est le schéma en groupe affine limite projective des groupes algébriques affines $Aut((5.7.*)_F/\mathfrak{Z}^n)$. Comme expliqué en 5.6, il provient d'un $\mathrm{MT}(\mathcal{O}_S)$-

schéma en groupes $Aut((5.7.*))$ et on dispose d'un morphisme (5.6.2)

$$G^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle} \longrightarrow Aut(5.7.*). \tag{5.8.1}$$

Un automorphisme de $(5.7.1)_F$, étant équivariant, est déterminé par sa restriction à $(5.7.2)_F$, et $(5.7.2)_F$ et $(5.7.3)_F$ ont même groupe d'automorphismes, car se déduisent l'une de l'autre. De là, une inclusion comme sous-groupe fermé et un isomorphisme

$$Aut(5.7.1) \hookrightarrow Aut(5.7.2) \xrightarrow{\sim} Aut(5.7.3). \tag{5.8.2}$$

L'action de ces groupes sur $\mathbb{Q}(1)$ définit un morphisme dans $\mathbb{G}_m$. En réalisation ω, la graduation de ω en définit une section, d'où une décomposition en produit semi-direct des $Aut((5.7.*)_\omega)$, compatible aux morphismes (5.8.2). Comparant à 2.1, on vérifie que (5.8.1) est de même compatible à la décomposition en produit semi-direct (2.1.2) de $G_\omega^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$.

Posons $H := Aut(5.72) \xrightarrow{\sim} Aut(5.7.3)$ et notons V le noyau du morphisme ci-dessus de H dans $\mathbb{G}_m$. La structure $(5.7.3)_\omega$ est sur $\mathbb{Q}$ et des copies $\prod_{x,y}$ de $\prod$, indexées par $x, y \in \{0, 1\}$, sur lesquelles $H_\omega := \omega(H)$ et en particulier $V_\omega := \omega(V)$ agit.

Proposition 5.9. *Notons $1_{y,x}$ l'élément neutre de la copie $\prod_{y,x}$ de $\prod$. Avec les notations de 5.8, le morphisme $v \mapsto v(1_{1,0})$ est un isomorphisme de schémas de V_ω avec $\prod_{1,0}$.*

Preuve. Soient v dans V_ω et $a := v(1_{1,0})$. Puisque V_ω agit trivialement sur $\mathbb{Q} = \omega(\mathbb{Q}(1))$ et respecte les monodromies locales, on a pour $x = 0, 1$

$$v(e_x) = e_x \quad \text{dans l'algèbre de Lie} \, \mathcal{L}^\vee \text{ de } \prod\nolimits_{x,x}. \tag{5.9.1}$$

Transformant par v l'identité

$$\Big(\exp(e_1) \text{ dans } \prod\nolimits_{0,0}\Big) = 1_{0,1} \cdot \Big(\exp(e_1) \text{ dans } \prod\nolimits_{1,1}\Big) \cdot 1_{1,0},$$

et que $1_{0,1}$ est l'inverse de $1_{1,0}$ dans le groupoïde des $\prod_{x,y}$, on obtient

$$v(\exp(e_1) \text{ dans } \prod\nolimits_{0,0}) = a^{-1} \exp(e_1) a,$$

qui équivaut à

$$v(e_1 \text{ dans Lie} \textstyle\prod_{0,0}) = \mathrm{ad}_{a^{-1}}(e_1). \tag{5.9.2}$$

Par équivariance, (5.11.2) implique que pour $\zeta \in \mu_N$,

$$v(e_\zeta \text{ dans Lie} \textstyle\prod_{0,0}) = \mathrm{ad}_{[\zeta]a^{-1}}(e_\zeta). \tag{5.9.3}$$

Pour a dans $\prod$, notons $\langle a\rangle_0$ l'automorphisme de $\prod$ induisant sur l'algèbre de Lie $\mathcal{L}^\wedge$ l'automorphisme, encore noté $\langle a\rangle_0$:

$$\langle a\rangle_0 : e_0 \longmapsto e_0, \quad e_\zeta \longmapsto \mathrm{ad}_{[\zeta]a^{-1}}(e_\zeta). \tag{5.9.4}$$

Notons $\langle a\rangle_{1,0}$ l'automorphisme du schéma $\prod$

$$\langle a\rangle_{1,0} : g \longmapsto a \cdot \langle a\rangle_0 (g). \tag{5.9.5}$$

Les formules (5.9.1) et (5.9.3) montrent que v agit par $\langle a\rangle_0$ sur $\prod_{0,0}$. Sur le $\prod_{0,0}$-torseur $\prod_{1,0}$, v agit par $\langle a\rangle_{1,0}$: transformer par v l'identité (g dans $\prod_{1,0}$) $= 1_{1,0} \cdot$ (g dans $\prod_{0,0}$).

Réciproquement, quelque soit a dans $\prod$, ces formules définissent un automorphisme $\langle a\rangle$ de $(5.7.3)_\omega$.

Remarques 5.10 (i)**.** L'isomorphisme de schémas de V_ω avec $\prod$ construit en 5.9 transforme élément neutre en élément neutre mais n'est pas compatible aux structures de groupes. Il respecte les graduation des algèbres affines, i.e. les actions correspondantes de $\mathbb{G}_m$ sur V_ω et $\prod$. L'action sur V_ω étant par automorphismes intérieurs dans H_ω, et $1_{1,0}$ étant fixe, on a en effet pour u dans $\mathbb{G}_m$

$$u\,v\,u^{-1} \longmapsto u\,v\,u^{-1}(1_{1,0}) = u(v(1_{1,0})).$$

(ii) L'analogue de 5.9 est encore vrai, avec la même preuve, pour $(5.7.3)_\omega/\mathfrak{Z}^n$: si $V^{(n)}$ est $\mathrm{Ker}(Aut((5.7.3)_\omega/\mathfrak{Z}^n) \to \mathbb{G}_m)$, $v \mapsto v(1_{1,0})$ est un isomorphisme de $V_\omega^{(n)}$ avec $(\prod/\mathfrak{Z}^n)$ compatible aux graduations. Il induit un isomorphisme entre les espaces tangents à l'origine: un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués de l'algèbre de Lie de $V_\omega^{(n)}$ avec $\mathcal{L}/(\text{degré} \geq n)$.

Les degrés étant > 0, le groupe $V_\omega^{(n)}$ est unipotent, et la limite V_ω des $V_\omega^{(n)}$ pro-unipotente. En chaque degré a le système projectif des $\mathrm{Lie}(V_\omega^{(n)})^a$ est stationnaire. Ceci permet comme en (A.14) de définir l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Lie}_{\mathrm{gr}}(V_\omega)$ de V_ω comme étant la somme des $\lim \mathrm{Lie}(V_\omega^{(n)})^a$. On a $\mathrm{Lie}\, V_\omega = \prod \mathrm{Lie}_{\mathrm{gr}}(V_\omega)^a$ et l'isomorphisme de schémas de V_ω avec $\prod$ induit un isomorphisme d'espace vectoriels gradués de $\mathrm{Lie}_{\mathrm{gr}}(V_\omega)$ avec $\mathcal{L}$.

Proposition 5.11. *Les* $\mathrm{MT}(\mathcal{O}(1/N))$*-schémas* $P_{y,x}$ *de 5.4 (in fine) sont des* $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$*-schémas.*

En d'autres termes, l'action de $G_\omega^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ sur $\omega(P_{yx})$ se factorise par G_ω ou, ce qui revient au même, celle de $U_\omega^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ se factorise par U_ω. Ces actions préservent les structures motiviques $(5.7.1)_\omega$. Par équivariance et composition des chemins, il suffit donc de considérer l'action sur $P_{1,0}$.

Lemme 5.12. *Le torseur* $P_{1,0}^{\mathrm{ab}}$ *sous* $P_{0,0}^{\mathrm{ab}} = \pi_1^{\mathrm{ab}}(X,0) = H_1(X)$ *est dans* $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$.

Preuve. Les inclusions de X dans les $\mathbb{P}^1 - \{\infty, z\}$ pour $z = 0$ ou $z \in \mu_N$ induisent un isomorphisme de $H_1(X)$ avec la somme des H_1 correspondant: une somme de copies de $\mathbb{Q}(1)$, et $P_{1,0}^{\mathrm{ab}}$ est la somme des $\mathbb{Q}(1)$-torseurs déduits de $P_{1,0}^{\mathrm{ab}}$ en poussant par $H_1(X) \to H^1(\mathbb{P}^1 - \{\infty, z\}) = \mathbb{Q}(1)$. Le torseur obtenu est celui des chemins, dans $\mathbb{P}^1 - \{\infty, z\}$, de 0 à 1 (remplacés par λ_0 ou λ_1 si $z = 0$ ou 1). Il s'identifie à celui des chemins, dans $\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$, de $-z$ à $1 - z$. Pour $z = 0$ ou 1, ces torseurs sont triviaux Si $z \neq 0, 1$, c'est le torseur de Kummer $K((1-z)/(-z))$, isomorphe à $K(1-z)$. Puisque $1 - z$ est dans Γ, les $K(1-z)$ et donc $P_{1,0}^{\mathrm{ab}}$ sont dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$. Par équivariance et composition des chemins, tous les $P_{y,x}^{\mathrm{ab}}$ sont en fait dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$.

Preuve de 5.11. Il nous faut vérifier que le morphisme (5.8.3) de $U_\omega^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ dans V_ω se factorise par U_ω. Il suffit de le vérifier sur les algèbres de Lie graduées, qu'on notera ici $\mathfrak{u}\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle$, $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$. Puisque $\mathfrak{u}^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ et $\mathfrak{u}$ sont des algèbres de Lie libres, ayant les mêmes générateurs sauf en degré un, il suffit même de vérifier qu'en degré un $\mathfrak{u}^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle 1} \to \mathfrak{v}^1$ se factorise par $\mathfrak{u}^1$.

D'après 5.10 (ii), le quotient de V_ω d'algèbre de Lie $\mathfrak{v}^1$ agit fidèlement sur $(5.7.3)_\omega^{\mathrm{ab}}$.

Puisque $(5.7.3)^{\mathrm{ab}}$ est dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$, l'action de $G_\omega^{\langle \mathcal{O}[1/N]\rangle}$ sur $(5.7.3)^{\mathrm{ab}}_\omega$ se factorise par G_ω, et 5.11 en résulte.

Notons, pour usage ultérieur, que 5.11 implique que V est dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$, et que l'action de G sur (5.7.3) induit des morphismes

$$G \to H \qquad \text{et} \qquad U \to V \ . \tag{5.12.1}$$

En réalisation ω, on a un morphisme compatible au produit semi-direct

$$\iota\colon G_\omega = \mathbb{G}_m \ltimes U_\omega \to H_\omega = \mathbb{G}_m \ltimes V_\omega \ . \tag{5.12.2}$$

5.13. Comme expliqué en A.9, l'algèbre enveloppante complétée de $\mathcal{L}^\wedge$ est $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta)_{\zeta\in\mu_N} \gg$. C'est le dual de l'algèbre affine de $\prod$, $\prod$ est le sous-schéma des éléments groupaux du schéma pro-vectoriel $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$, et sa loi de groupe est induite par la multiplication dans $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$. Si P un $\prod$-torseur, P est de même le sous-schéma des éléments groupaux du schéma provectoriel $\mathcal{O}(P)^\vee$. Ce dernier est un $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$-module à droite, et l'action de $\prod$ sur P est induite par la structure de $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$-module à droite de $\mathcal{O}(P)^\vee$.

Pour chaque copie $\prod_{y,x}$ de $\prod$, notons $(\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg)_{y,x}$ une copie correspondante du dual $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$ de son algèbre affine. Tout automorphisme de (groupe $\prod_{0,0}$, $\prod_{0,0}$-torseur $\prod_{1,0}$) est donc induit par l'automorphisme correspondant de (algèbre $(\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg)_{0,0}$, module à droite $\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg_{1,0}$):

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{0,0} & , & \text{torseur } \prod_{1,0} \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg_{0,0} & , & \text{module } (\mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg)_{1,0} \ .
\end{array}$$

Pour a dans $\prod$, et $\langle a\rangle$ lélément correspondant de V_ω (5.9), l'action de $\langle a\rangle$ sur $\prod_{0,0}$ est induite par

$$\langle a\rangle_0 : \mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg \to \mathbb{Q} \ll e_0, (e_\zeta) \gg\colon e_0 \longmapsto ([\zeta]a)^{-1} e_\zeta([\zeta]a) \tag{5.13.1}$$

(cf. 5.9.4), tandis que l'action de $\langle a\rangle$ sur $\prod_{1,0}$ est induite par l'automorphisme $\langle a\rangle_0$-semi-linéaire $\langle a\rangle_{1,0}$ du $\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg$-module à droite $\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg$ qui envoie 1 sur a:

$$(5.13.2)\qquad \langle a\rangle_{1,0}\colon x\longmapsto a.\langle a\rangle_0(x)\qquad \text{(cf. 5.9.5).}$$

Si on transporte par 5.9 à la copie $\prod_{1,0}$ de $\prod$ la loi de groupe de V_ω, on obtient une nouvelle loi de groupe $\circ$ sur le schéma $\prod$. Elle est caractérisée par $\langle a\circ b\rangle_{1,0}=\langle a\rangle_{1,0}\langle b\rangle_{1,0}$. C'est

$$(5.13.3)\qquad a\circ b=a\cdot\langle a\rangle_0(b)$$

car $a\circ b=\langle a\circ b\rangle_{1,0}(1)=\langle a\rangle_{1,0}(b)=a\cdot\langle a\rangle_0(b)$.

Prenant l'espace tangent à l'origine, on déduit de 5.9 un isomorphisme de pro-espace vectoriel de $\mathrm{Lie}\,V_\omega$ avec $\mathfrak{L}^\wedge$. Transportons par cet isomorphisme les actions de $\mathrm{Lie}\,V_\omega$ sur $\prod_{0,0}$, sur $\mathfrak{L}^\wedge=\mathrm{Lie}(\prod_{0,0})$, sur $(\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg)_{0,0}$, sur $\prod_{1,0}$ et sur le module $(\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg)_{1,0}$, ainsi que le crochet de Lie de $\mathrm{Lie}(V_\omega)$. Le nouveau crochet de Lie obtenu sur $\mathfrak{L}^\wedge$ est appelé le *crochet de Ihara* $\{\ ,\ \}$. Dérivant (5.9.4), on voit que l'action de a dans $(\mathfrak{L}^\wedge,\{\ ,\ \})$ sur $\mathfrak{L}^\wedge=\mathrm{Lie}(\prod_{0,0})$ (resp. sur l'algèbre $(\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg)_{0,0}$ est la dérivation

$$(5.13.4)\qquad \partial_a\colon e_0\to 0, e_\zeta\longmapsto[-[\zeta](a),e_\zeta].$$

Dérivant (5.13.2), on voit que l'action sur le module à droite $(\mathbb{Q}\ll e_0,(e_\zeta)\gg)_{1,0}$ est

$$(5.13.5)\qquad x\longmapsto ax+\partial_a x,$$

la somme de ∂_a et de la multiplication à gauche par a, qu'on notera ci-dessous μ_a.

L'action (5.13.5) de $\{a,b\}$ est le crochet des actions (5.13.5) de a et b. Elle envoie 1 sur $\{a,b\}$ et on a donc

$$(5.13.6)\qquad \{a,b\}=[a,b]+\partial_a(b)-\partial_b(a)$$

car $[\mu_a+\partial_a,\mu_b+\partial_b](1)=[\mu_a,\mu_b](1)+\partial_a\mu_b(1)-\partial_b\mu_a(1)=[a,b]+\partial_a(b)-\partial_b(a)$.

5.14 Remarques. (i) Il est clair sur (5.12.4) que $\partial_{e_1} = 0$. Puisque le centralisateur de e_1 dans $(\mathcal{L}^\wedge, [\ ,\ ])$ est réduit aux multiples de e_1 (4.7), le noyau de $a \mapsto \partial_a$ est réduit à $\mathbb{Q}e_1$.
(ii) L'élément e_1 de $(\mathcal{L}^\wedge, \{\ ,\ \})$ est central:

$$\{a, b\} = [a, e_1] + \partial_a(e_1) - \partial_1(a) = [a, e_1] - [a, e_1] - 0 = 0.$$

5.15 Remarque. On prendra garde que l'application exponentielle de Lie V_ω dans V_ω, identifiée par 5.9 à une application de $\mathcal{L}^\wedge$ dans $\prod$, n'est pas l'application exponentielle de $\mathcal{L}^\wedge$ dans $\prod$. Il résulte de 5.13.5 que, si μ_a est la multiplication à gauche par a, c'est $a \longmapsto \sum(\mu_a + \partial_a)^n/n!$ appliqué à 1. Premiers termes:

$$a + (a^2 + \partial_a(a))/2 + (a^3 + 2a \cdot \partial_a(a) + \partial_a(a) \cdot a + \partial_a^2(a))/6 + \cdots$$

5.16. Fixons un plongement σ de k dans $\mathbb{C}$, i.e. un isomorphisme de $\mu_N(k)$ avec $\mu_N(\mathbb{C})$. Le *droit chemin* du point base 1_0 de $\mathbb{C}^* - \mu_N$ vers le point base $(-1)_1$ va par segments de droite successifs (a) dans l'espace tangent en 0, de 1 à $\varepsilon > 0$; (b) de ε à $1 - \varepsilon$ dans $\mathbb{C}^* - \mu_N$; (c) de $-\varepsilon$ à -1 dans l'espace tangent à un. Ce droit chemin a une image dch dans $(P_{(-1)_1, 1_0})_\sigma$. Via l'isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{\sigma,\omega}$, il correspond à un élément de

$$\mathrm{dch}(\sigma) \in (P_{(-1)_1, 1_0})_\omega \otimes \mathbb{C} = \prod(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \ll e_0, (e_\zeta)_{\zeta \in \mu_N(k)} \gg .$$

Les coefficients de $\mathrm{dch}(\sigma)$ sont donnés par

(5.16.1) $\quad$ coefficient de $e_{x_1} \dots e_{x_n} =$

$$= \text{ intégrale itérée de 0 à 1 de } \frac{dz}{z - \sigma(x_1)} \cdots \frac{dz}{z - \sigma(x_n)}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{dz_1}{z_1 - \sigma(x_1)} \int_0^{z_1} \left(\frac{dz_2}{z_2 - \sigma(x_2)} \cdots \int_0^{z_{n-1}} \frac{dz_n}{z_n - \sigma(x_n)} \right) \cdots \right).$$

Si $x_n = 0$ ou si $x_1 = 1$, l'intégrale diverge et doit être régularisée: remplacer les limites d'intégration 0 et 1 par ε et $1 - \eta$; l'intégrale itérée convergente obtenue a pour comportement asymptotique pour $\varepsilon, \eta \to 0$

$$\text{Intégrale itérée} = \text{polynôme } (\log \varepsilon, \log \eta) + O(\sup(\varepsilon |\log \varepsilon|^A, \eta |\log \eta|^B))$$

pour A and B convenables, et on prend le terme constant du polynôme.

Les valeurs multizêta et leur analogue cyclotomique apparaissent quand dans (5.16.1) on développe $dz/z-\zeta$ en série géométrique:

$$\frac{dz}{z-\zeta}=\frac{-\zeta^{-1}z}{1-\zeta^{-1}z}\ \frac{dz}{z}=-\sum_{n\geq 1}(\zeta^{-1}z)^n.\frac{dz}{z}.$$

Proposition 5.17. (i) *Pour* $\zeta_1,\ldots,\zeta_m$ *dans* $\mu_N(k)$ *et des entiers* $s_1,\ldots,s_m\geq 1$, *si* $s_1\neq 1$, *le coefficient de* $e_0^{s_1-1}e_{\zeta_1}\ldots e_0^{s_m-1}e_{\zeta_m}$ *dans* $\mathrm{dch}(\sigma)$ *est*

$$(-1)^m\sum_{n_1>\ldots>n_m>0}\frac{\sigma\left(\zeta_1^{n_2-n_1}\zeta_2^{n_3-n_2}\ldots\zeta_m^{-n_m}\right)}{n_1^{s_1}\ldots n_m^{s_m}}\tag{5.17.1}$$

(ii) $\mathrm{dch}(\sigma)$ *est caractérisé par les propriétés d'être un élément groupal (terme constant 1, et* $\Delta\mathrm{dch}(\sigma)=\mathrm{dch}(\sigma)\otimes\mathrm{dch}(\sigma)$*) ayant les coefficients* (5.17.1) *et dont les coefficients de* e_0 *et* e_1 *sont nuls.*

Notons τ l'application de $\mathbb{G}_m$ dans H_ω définie par les graduations (cf. 5.8) et $\langle g\rangle$ l'élément de $V_\omega(\mathbb{C})$ correspondant par 5.9 à $g\in\prod(\mathbb{C})$.

Proposition 5.18. *L'élément* $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$ *de* $H_\omega(\mathbb{C})$ *transforme les* $\mathbb{Q}$*-formes* $(P_{0,0})_\omega$ *et* $(P_{1,0})_\omega$ *de* $(P_{0,0})_\omega\otimes\mathbb{C}$ *et* $(P_{1,0})_\omega\otimes\mathbb{C}$ *en les* $\mathbb{Q}$*-formes* $(P_{0,0})_\sigma$ *et* $(P_{1,0})_\sigma$*.*

Preuve. Les éléments de $\pi_1(X(\mathbb{C}),1_0)$ ont dans $\prod(\mathbb{C})$ une image rationnelle pour la $\mathbb{Q}$-forme $(P_{0,0})_\sigma$. Ce π_1 contient la monodromie locale en 0 et le chemin allant droit près de 1, tournant autour de 1, et revenant. Images: $\exp(2\pi i\,e_0)$ et $\mathrm{dch}(\sigma)^{-1}\exp(2\pi i\,e_1)\mathrm{dch}(\sigma)$. Ce sont les images de $\exp(e_0)$ et $\exp(e_1)$ par $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$. La $\mathbb{Q}$-forme $(P_{0,0})_\sigma$ est μ_N-équivariante. Les images des $\exp(e_\zeta)$ par $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$ sont donc elles aussi rationnelles. La pro-algèbre de Lie $\mathcal{L}^\wedge$ est l'unique $\mathbb{Q}$-forme de $\mathcal{L}^\wedge_\mathbb{C}$ pour laquelle les e_0 et e_ζ sont rationnels, et $\prod$ est donc l'unique $\mathbb{Q}$-forme du groupe $\prod_\mathbb{C}$ pour laquelle $\exp(e_0)$ et les $\exp(e_\zeta)$ sont rationnels. Transportant par $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$, on obtient l'assertion pour $(P_{0,0})_\omega$.

Montrons que la $\mathbb{Q}$-forme $(P_{1,0})_\sigma$ de $(P_{1,0})_\omega\otimes\mathbb{C}$ est l'image de la $\mathbb{Q}$-forme $(P_{1,0})_\omega$ par $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$. Ces deux $\mathbb{Q}$-formes sont des $(P_{0,0})_\sigma$-torseurs. Il suffit donc de montrer qu'elles admettent un point rationnel commun. L'image $\mathrm{dch}(\sigma)$ de 1 par $\langle\mathrm{dch}(\sigma)\rangle\,\tau(2\pi i)$ est en effet dans $(P_{1,0})_\omega(\mathbb{Q})$ car image du droit chemin de 1_0 à $(-1)_1$.

5.19. Notons encore a_σ un élément de G_ω image d'un élément $a_\sigma \in G_\omega \langle \mathrm{MT}(k) \rangle$ de 2.12, et $\iota(a_\sigma)$ son image par 5.12.2 dans H_ω. De même pour a_σ^0 (2.12.2). L'élément $\iota(a_\sigma)$ lui-aussi transforme les $\mathbb{Q}$-formes ω de $(P_{00})_\omega \otimes \mathbb{C}$ et $(P_{1,0})_\omega \otimes \mathbb{C}$ en les $\mathbb{Q}$-formes σ. Il existe donc $v_\sigma \in H_\omega(\mathbb{Q})$ tel que

$$\langle \mathrm{dch}(\sigma) \rangle \, \tau(2\pi i) = \iota(a_\sigma) v_\sigma. \tag{5.19.1}$$

Si comme en (2.12.2) on a choisit a_σ de la forme $a_\sigma^0 \tau(2\pi i)$ avec $a_\sigma^0 \in U_\omega(\mathbb{C})$, tant $\langle \mathrm{dch}(\sigma) \rangle \, \tau(2\pi i)$ que $\iota(a_\sigma)$ ont la même projection $2\pi i$ dans le quotient $\mathbb{G}_m$ de H_ω, v_σ est dans $V_\omega(\mathbb{Q})$ et on peut récrire (5.19.1) sous les formes

$$\langle \mathrm{dch}(\sigma) \rangle = \iota(a_\sigma^0) \cdot (\tau(2\pi i) v_\sigma \tau(2\pi i)^{-1}) \tag{5.19.2}$$

$$\tau(2\pi i)^{-1} \, \langle \mathrm{dch}(\sigma) \rangle \, \tau(2\pi i) = (\tau(2\pi i)^{-1} \iota(a_\sigma^0) \tau(2\pi i)) v_\sigma. \tag{5.19.3}$$

A ces formules correspondent deux façons de voir les relations entre les coefficients (5.17.1) de $\mathrm{dch}(\sigma)$ impliquées par la théorie motivique.

La formule (5.19.2) implique que $\mathrm{dch}(\sigma) \in \prod(\mathbb{C})$ est contenu dans la sous-variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ suivante. Soit $\iota(U_\omega) \subset (\prod, \circ)$ le sous-groupe unipotent image de U_ω par (5.10.3). Soit D_σ l'image de la droite de coordonnée t par $t \mapsto \tau(t) v_\sigma \tau(t)^{-1}$. Cette application est définie en $t = 0$ car $\mathcal{L}^\wedge$ est à degrés > 0. On a $t = 0 \mapsto$ élément neutre. Par (5.19.2), $\mathrm{dch}(\sigma)$ est contenu dans l'image par le produit $\circ$ de $\iota(U_\omega)$ et D_σ. Noter que D_σ peut dépendre de σ, mais $\iota(U_\omega)$ non.

La formule (5.19.3) suggère de considérer plutôt $\tau(2\pi i)^{-1}(\mathrm{dch}(\sigma))$, de coefficients convergents donnés par la formule (5.17.1), divisée par $(2\pi i)^{\sum s_i}$. Les autres coefficients sont déduits de ceux-là par des formules rationnelles. L'élément $\tau(2\pi i)^{-1}(\mathrm{dch}(\sigma)) \in \prod(\mathbb{C})$ est contenue dans la sous-variété définie sur $\mathbb{Q}$ $\iota(U_\omega) v_\sigma$, une classe latérale rationnelle pouvant dépendre de σ du sous-groupe $\iota(U_\omega)$ de $(\prod, \circ)$

5.20. Supposons que $N = 1$. On a $k = \mathbb{Q}$; σ est unique. Choisissons a_σ^0 réel (2.12). Puisque $\mathrm{dch}(\sigma)$ est réel, (5.12.2) montre que $\tau(2\pi i) v_\sigma \tau(2\pi i)^{-1}$ est réel. Le logarithme de v_σ est donc purement en degré pair, $\tau(t) v_\sigma \tau(t)^{-1}$ ne dépend que de t^2 et ceci permet de poser $d(t^2) := \tau(t) v_\sigma \tau(t)^{-1}$.

Regardons $\prod(\mathbb{C})$ comme l'espace des éléments groupaux de $\mathbb{C} \ll e_0, e_1 \gg$. L'algèbre de Lie de U_ω étant en degré ≥ 3, les coefficients de $\mathrm{dch}(\sigma)$ et de v_σ coïncident en degré ≤ 2. On a

$$\mathrm{dch}(\sigma) = 1 - \zeta(2)[e_0, e_1] + \text{degré} \geq 3$$

et donc, puisque $\zeta(2) = -(2\pi i)^2/24$,

$$v_\sigma = 1 + \tfrac{1}{24}[e_0, e_1] + \text{degré} \geq 3.$$

Pour $g \in \iota(U_\omega(\mathbb{C}))$ et $d \in D_\sigma$, $d = \tau(t) v_\sigma \tau(t)^{-1}$, t^2 est donc 24 fois le coefficient de $e_0 e_1$ dans d, égal à celui de $e_0 e_1$ dans $g \circ d$. Ceci détermine d à partir de $g \circ d$ et

$$\iota(U_\omega) \times D_\sigma \to \left(\prod, \circ\right)$$

est un plongement fermé: l'image est l'ensemble des $x \in \prod \subset \mathbb{C} \ll e_0, e_1 \gg$ tels que

$$x \circ d \text{ (24.coefficient de } e_0 e_1 \text{ dans } x)^{-1} \in \iota(U_\omega). \tag{5.20.1}$$

Une variante d'une conjecture de transcendance de Grothendieck affirme que a_σ est Zariski-dense (sur $\mathbb{Q}$) dans G_ω. Si tel est le cas, toutes les relations algébriques entre les coefficients de dch_σ sont données par 5.20.1.

On observera que les équations polynômiales entre les coefficients de dch_σ déduites de 5.20.1 ont les propriétés suivantes.

(a) Homogénéité: toute équation est somme d'équations isobares, pour le poids. Ceci exprime que $\iota(U_\omega) \circ D_\sigma \subset V_\omega$ est stable sous l'action intérieure de $\mathbb{G}_m \subset H_\omega$. En effet, tant $\iota(U_\omega)$ que D_σ le sont.

(b) Si on ajoute l'équation "$\pi^2 = 0$", plus précisément: "nullité du coefficient de $e_0 e_1$", on obtient l'idéal des équations définissant le sous-groupe $\iota(U_\omega)$ de $(\prod, 0)$.

(c) Si on ajoute plutôt l'équation "$\pi^2 = \alpha$", on obtient une classe latérale de ce groupe.

G. Racinet donne dans sa thèse un système d'équations polynômiales vérifiées par les coefficients de $\mathrm{dch}(\sigma)$ et prouve que ce système vérifie (a) et la forme affaiblie suivante de (b) (c): si on ajoute l'équation "$\pi^2 = 0$", on obtient un sous-groupe de $(\prod, 0)$, et si on ajoute "$\pi^2 = \alpha$", on obtient une classe latérale de ce sous-groupe.

5.21. La situation est similaire pour $N = 2$, $\zeta(2)$ continuant à jouer le même rôle que pour $N = 1$. Il n'est plus vrai que $\operatorname{Lie} U_\omega$ est en degré ≥ 3, mais on est sauvé par la compatibilité entre les cas $N = 1$ et $N = 2$:

$$\begin{array}{ccc} U_\omega \langle \mathrm{MT}(\mathbb{Z}[1/2]) \rangle & \longrightarrow & (\prod \text{ pour } N = 2, o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\omega \langle \mathrm{MT}(\mathbb{Z}) \rangle & \longrightarrow & (\prod \text{ pour } N = 1, o)\,. \end{array}$$

5.22. Pour $N \geq 3$, k est totalement complexe. Le coefficient de e_ζ dans $\operatorname{dch}(\sigma)$ est $-\log(1-\sigma(\zeta))$ (resp. 0 pour $\zeta = 1$), et le rôle précédemment joué par le coefficient $-\zeta(2)$ de $e_0 e_1$ est joué par la différence des coefficients de e_ζ et de $e_{\zeta^{-1}}$, pour $\zeta \in \mu_N$ autre que ± 1. Cette différence est un multiple rationnel de $2\pi i$, dépendant de σ. La courbe D_σ est encore une droite, paramétrée par la difference δ_{coeff} des coefficients de e_ζ et $e_{\zeta^{-1}}$,

$$\iota(U_\omega) \times D_\sigma \to \left(\prod, \circ\right)$$

est un plongement fermé, et l'image est l'ensemble des $x \in \prod \subset \mathbb{C} \ll e_0, (e_\alpha)_{\alpha \in \mu_N} \gg$ tels que

$$x \circ (\text{point de } D_\sigma \text{ donné par } \delta_{\mathrm{coeff}}(x))^{-1} \in \iota(U_\omega). \tag{5.22.1}$$

La conjecture de Grothendieck affirme à nouveau que toutes les relations polynômiales à coefficients rationnels entre les coefficients de $\operatorname{dch}(\sigma)$ proviennent de (5.22.1).

Le système d'équations polynômiales déduit de (5.22.1) a encore les propriétés (a), (b), (c) de 5.20, avec “π^2” remplacé par “$2\pi i$” (plus précisément, par la différence des coefficients de e_ζ et $e_{\zeta^{-1}}$), et Racinet a obtenu pour tout N des résultats semblables à ceux mentionnés en 5.20.

5.23. Permettons à nouveau à N d'être un quelconque entier ≥ 1. Puisque $\operatorname{dch}(\sigma)$ est un élément groupal de $\mathbb{C} \ll e_0, (e_\alpha)_{\alpha \in \mu_N} \gg$, le produit de deux coefficients de $\operatorname{dch}(\sigma)$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels de coefficients, de sorte que connaître les relations linéaires entre les coefficients suffit pour connaître les relations polynômiales entre eux.

Théorème 5.24. *Soit d_n la dimension en degré n de l'image de $\iota\colon \mathrm{Lie}\, U_\omega \to \mathrm{Lie}\, V_\omega$ (5.12.2). Soit A l'algèbre de polynômes graduée engendrée sur $\mathbb{Q}$ par d_n générateurs de degré n, et par un générateur additionnel t_0 en degré 1 (resp. 2 si $N = 1$ ou 2).*

Il existe un homomorphisme φ_σ de A dans $\mathbb{C}$, envoyant t_0 sur $2\pi i$ (resp. π^2 si $N = 1$ ou 2), tel que les coefficients de monômes de degré d dans dch_σ soient contenus dans φ_σ (partie de degré d de A).

Preuve. On prend simplement pour A l'algèbre affine de $\iota(U_\omega) \times D_\sigma$. Elle a la structure dite d'algèbre graduée, la fonction "coefficient d'un monôme de degré d" est de degré d, et $\mathrm{dch}(\sigma)$ est un point de $\mathrm{Spec}(A)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. un homomorphisme φ_σ de A dans $\mathbb{C}$. Le générateur t_0 est la coordonnée de D_σ, convenablement normalisée.

Corollaire 5.25. *Soit D_n la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les coefficients des monômes de degré n dans $\mathrm{dch}(\sigma)$. Le série génératrice $\sum D_n t^n$ est terme à terme majorée par la suivante:*

(i) *Pour $N = 1$: $1/(1 - t^2 - t^3)$.*
(ii) *Pour $N = 2$: $1/(1 - t - t^2)$.*
(iii) *Pour $N \geq 3$ ayant ν facteurs premiers: $1/\left(1 - \left(\frac{\varphi(N)}{2} + \nu\right) t + (\nu - 1)t^2\right)$, où φ est l'indicateur d'Euler $|(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*|$.*

Preuve. La série majorante est la série génératrice des dimensions des composantes homogènes de l'algèbre graduée de polynôme construite comme l'algèbre A de 5.25, mais en partant de $\mathrm{Lie}(U_\omega)$ plutôt que d'un quotient. En effet, cette série est le produit de $\frac{1}{1-t}$ (resp $\frac{1}{1-t^2}$ si $N = 1$ ou 2) par la série génératrice pour l'algèbre enveloppante de $\mathrm{Lie}(U)^{\mathrm{gr}}_\omega$. Cette dernière est une algèbre associative libre. Série génératrice: $\sum f(t)^n = 1/(1 - f(t))$, avec $f(t) = (\nu - 1)t + \frac{\varphi(N)}{2} t/(1 - t)$ (resp. $f(t) = t^3/(1 - t^2)$ si $N = 1$, $t/(1 - t^2)$ si $N = 2$). Le calcul final est laissé au lecteur.

Remarque 5.26. Pour $N = 1$, nous retrouvons ainsi le résultat de Terasoma (2002). Terasoma considère un groupe de cohomologie relative, correspondant à un motif de Tate mixte sur $\mathbb{Z}$ qui est sans doute le suivant: dans l'algèbre affine de ${}_1P_0$, prendre la partie de poids $\leq 2n$, puis les coinvariants de la monodromie locale en 0 et 1, agissant à droite (resp. gauche) sur $P_{1,0}$. Comme la nôtre, sa preuve repose sur 1.6.

5.27. La conjonction de (a) toute relation $\mathbb{Q}$-linéaire entre les coefficients de $\mathrm{dch}(\sigma)$ est somme de relations isobares (b) la borne 5.25 est atteinte
équivaut à la conjonction de (c) la conjecture de Grothendieck que a_σ est $\mathbb{Q}$-Zariski dense dans U_ω, et (d) l'injectivité de $\iota\colon U_\omega \to V_\omega$.

Le premier auteur a vérifié que (d) est vrai pour $N = 2, 3$ ou 4 (non publié). Le second auteur a montré que (d) est souvent faux. Plus précisément, il résulte de Goncharov (2001) que (d) est faux pour N premier ≥ 11. Déjà en degré 2

$$\overset{2}{\wedge}(\mathrm{Lie}(U_\omega)^1) \subset (\mathrm{Lie}(U_\omega))^2 \to (\mathrm{Lie}\, V_\omega)^2$$

n'est pas injectif: la dimension du noyau coïncide avec la dimension de l'espace des formes modulaires cuspidales de poids 2 sur $X_1(p)$.

Pour obtenir une estimation raisonnable, il faudrait connaître la dimension des composantes graduées de l'image de $\mathrm{Lie}\, U_\omega$ dans $\mathrm{Lie}\, V_\omega$. On ne connaît ces dimensions que pour $N = 2, 3, 4$. La question plus intéressante serait de déterminer non seulement ces dimensions, mais encore l'image elle-même. On ne sait le faire dans aucun cas.

5.28. Il serait très intéressant de disposer pour les motifs de Tate mixte de réalisations cristallines qui, appliquées aux espaces de chemins motiviques, fournissent les réalisations considérées en Deligne (1989).

Dans le cas de motifs de Tate mixte M sur $\mathbb{Z}[1/D]$, on veut, pour chaque nombre premier p premier à D, un automorphisme dit de Frobenius

$$F_p\colon M_\sigma \otimes \mathbb{Q}_p \to M_\sigma \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Cet automorphisme est l'action d'un élément canonique de $G_\omega(\mathbb{Q}_p)$, pour

$$G_\omega = G_\omega \left\langle \mathrm{MT}(\mathbb{Z}[1/D]) \right\rangle.$$

Sur $\mathbb{Q}(1)_\sigma \otimes \mathbb{Q}_p$, F_p est la multiplication par $1/p$.

Pour $N=1$ ou 2, on a $k=\mathbb{Q}$ et, pour p premier à N, on disposerait donc de F_p^{-1} de la forme

$$F_p^{-1} = \varphi_p \tau(p) \in G_\omega(\mathbb{Q}_p)$$

et de l'image $\iota(\varphi_p)$ de φ_p dans $V_\omega(\mathbb{Q}_p)$. Plongeons comme d'habitude $V_\omega(\mathbb{Q}_p)$ dans $\mathbb{Q}_p \ll e_0, e_1 \gg$, pour $N=1$, ou $\mathbb{Q}_p \ll e_0, e_1, e_{-1} \gg$, pour $N=2$. Les coefficients de $\iota(\varphi_p)$ semblent être des analogues p-adiques des valeurs multizêta (cf Deligne (1989) 3.4). D'après 5.20, on s'attend à ce qu'ils vérifient toutes les identités satisfaites par les coefficients de $\mathrm{dch}(\sigma)$, ainsi que "$\pi^2=0$" (nullité du coefficient de e_0e_1). Le formalisme cristallin espéré prouverait en tout cas les identités déduites de (5.20.1), et de "$\pi^2=0$".

Il serait intéressant aussi de disposer pour ces coefficients d'expressions p-adiques qui rendent claires qu'ils vérifient des identités du type $\mathrm{coeff}(e_0^{n-1}e_1)\mathrm{coeff}(e_0^{m-1}e_1) = \mathrm{coeff}(e_0^{n-1}e_1e_0^{m-1}e_1) + \mathrm{coeff}(e_0^{m-1}e_1e_0^{n-1}) + \mathrm{coeff}(e_0^{n+m-1})e_1)$, qui pour $\mathrm{dch}(\sigma)$ expriment que

$$\sum \frac{1}{k^n} . \sum \frac{1}{\ell^m} = \sum_{k>\ell} \frac{1}{k^n}\frac{1}{\ell^m} + \sum_{\ell>k} \frac{1}{k^n}\frac{1}{\ell^m} + \sum \frac{1}{k^{n+m}}.$$

Pour $N \geq 3$, le plus commode est de se rappeler que, même si les points de μ_N ne sont définis que sur k, $X = A^* - \mu_N$ est défini sur $\mathbb{Q}$, de sorte que $\pi_1(X,0)$ et $P_{1,0}(X)$ sont de façon naturelle des $\mathrm{MAT}(k/\mathbb{Q})$-schémas. La réalisation de de Rham de Lie $\pi_1(X,0)$ est une $\mathbb{Q}$-forme $\mathcal{L}^{\wedge}_{\mathrm{DR}}$ de $\mathcal{L}^{\wedge}\widehat{\otimes}k$: les invariants de $\mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ agissant sur k et permutant les e_ζ ($\zeta \in \mu_N$). Pour $p \nmid N$, la théorie cristalline fournit un automorphisme de $\mathcal{L}^{\wedge}_{\mathrm{DR}}$ et du $\exp(\mathcal{L}^{\wedge}_{\mathrm{DR}})$-torseur $P_{1,0}(X)_{\mathrm{DR}}$.

6. Profondeur.

6.1. Avec les notations de 5.1, pour tout point base x, l'inclusion de X dans $A^* := \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ induit un morphisme du groupe fondamental motivique de X dans celui, $\mathbb{Q}(1)$, de A^*. On définit la filtration par la profondeur D de $\pi_1(X, x)$ par

$$\begin{aligned} & D^0\pi_1(X,x) := \pi_1(X,x), \\ & D^1\pi_1(X,x) := \mathrm{Ker}(\pi_1(X,x) \to \pi_1(A^*,x), \text{ et, pour } n \geq 1, \\ & D^n\pi_1(X,x) := \text{série centrale descendante de } D^1\pi_1(X,x). \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

On filtre de même les algèbres de Lie:

$$D^n \mathrm{Lie}\, \pi_1(X,x) = \mathrm{Lie}\, D^n\pi_1(X,x). \tag{6.1.2}$$

Si on pousse le $\pi_1(X,x)$-torseur $P_{y,x}$ par $\pi_1 \to \pi_1/D^n$, les $P_{y,x}/D^n$ obtenus forment un groupoïde quotient du groupoïde des $P_{y,x}$.

Appliquons A.10, A.11. La filtration par la profondeur induit une filtration de l'algèbre enveloppante complétée $\mathcal{U}^\wedge \mathrm{Lie}\, \pi_1(X,x)$ ainsi que de l'algèbre affine $\mathcal{O}(\pi_1(X,x))$, qui en est duale. Elle induit aussi une filtration sur les algèbres affines des torseurs $P_{y,x}$. L'algèbre affine du quotient $\pi_1(X,x)/D^{n+1}$ de $\pi_1(X,x)$ est la sous-algèbre de l'algèbre affine de $\pi_1(X,x)$ engendrée par $D^{-n}\mathcal{O}(\pi_1(X,x))$. De même pour les $P_{y,x}$.

6.2. En réalisation ω, l'algèbre de Lie de $\pi_1(X,x)$ est $\mathcal{L}^\wedge$ (5.7), le complété de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}$ engendrée par e_0 et les e_ζ ($\zeta \in \mu_N$). La filtration de profondeur est déduite la graduation par le degré en les e_ζ, appelé le *D-degré*. Cette graduation est compatible à la graduation provenant de celle de ω pour laquelle e_0 et les e_ζ sont de degré un et est μ_N-équivariante. Elle se propage aux algèbres enveloppantes, aux algèbres affines et aux algèbres affines des torseurs triviaux $(P_{y,x})_\omega$. L'action correspondante ρ_D de $\mathbb{G}_m$ pour laquelle $\rho_D(\lambda)$ fixe e_0 et transforme e_ζ en λe_ζ sera appellée action "D-degré".

On prendra garde que les filtrations D sont motiviques et stables par l'automorphisme $u \mapsto u^{-1}$ de X, mais que le D-degré est défini seulement en réalisation ω et n'est pas stable par $u \mapsto u^{-1}$. L'automorphisme de $\mathcal{L}^\wedge$ induit par $u \mapsto u^{-1}$ échange e_0, qui est homogène de D-degré 0, et $e_\infty = -e_0 - \sum e_\zeta$, qui ne l'est pas.

6.3. D'après 5.11, le $\mathrm{MT}(\mathcal{O}[1/N])$-schéma en groupe V de 5.8 est déjà dans $\mathrm{MT}(k)_\Gamma$. Il agit sur $P_{0,0}$ et $P_{1,0}$. On définit la filtration D de $\mathrm{Lie}\, V$ par la condition que $D^p \mathrm{Lie}\, V$ soit maximal tel que l'action de $\mathrm{Lie}\, V$ sur $\mathcal{O}(P_{0,0})$ et $\mathcal{O}(P_{0,1})$ envoie $D^p \mathrm{Lie}\, V \otimes D^q \mathcal{O}(P_{0,0})$ dans $D^{p+q}\mathcal{O}(P_{0,0})$ et $D^p \mathrm{Lie}\, V \otimes D^q \mathcal{O}(P_{1,0})$ dans $D^{p+q}\mathcal{O}(P_{1,0})$.

Passons à la réalisation ω, où V_ω s'identifie à $(\prod, \circ)$ agissant sur les copies $\prod_{0,0}$ et $\prod_{1,0}$ de $\prod$ par $g \mapsto \langle g \rangle_0$ et $\langle g \rangle_{1,0}$ (5.9 et 5.13).

Proposition 6.4. *L'action "D-degré" ρ_D de $\mathbb{G}_m$ sur $\prod$ respecte les actions $\langle g \rangle_0$ et $\langle g \rangle_{10}$ de $(\prod, \circ)$ sur $\prod$. Elle respecte donc la loi de groupe $\circ$ sur $\prod$ et le crochet $\{\ ,\ \}$ de $\mathcal{L}^\wedge$.*

L'action $\langle g \rangle_0$ de $g \in \prod$ sur le groupe $\prod$ est caractérisée par les propriétés de commuter à l'action de μ_N sur $\prod$, de fixer $\exp(e_0)$ et d'envoyer $\exp(e_1)$ sur $g^{-1}\exp(e_1)g$. Son conjugué par $\rho_D(\lambda)$ commute encore à μ_N, fixe $\exp(e_0)$ et envoie $\exp(\lambda e_1)$ sur $\rho_D(\lambda)(g)^{-1}\exp(\lambda e_1)\rho_D(\lambda)(g)$. Cette dernière propriété équivaut à envoyer $\exp(e_1)$ sur $\rho_D(\lambda)(g)^{-1}\exp(e_1)\rho_D(\lambda)(g)$: $\rho_D(\lambda)$ conjugue $\langle g \rangle_0$ en $\langle \rho_D(\lambda)(g) \rangle_0$. Conjugant $\langle g \rangle_{10} : x \mapsto g\, \langle g \rangle_0 (x)$ par $\rho_D(\lambda)$, on en déduit que $\rho_D(\lambda)$ transforme $\langle g \rangle_{10}$ en $\langle \rho_D(\lambda)(g) \rangle_{10}$.

6.5. Puisque l'action de $\mathrm{Lie}\, V_\omega = (\mathcal{L}^\wedge, \{\ ,\ \})$ sur $\mathcal{O}(P_{1,0})_\omega$ est fidèle, il résulte de 6.4 que la filtration D de $\mathrm{Lie}\, V_\omega$ coïncide avec la filtration D de $\mathcal{L}^\wedge$ déduite de la graduation par le D-degré de $\mathcal{L}$. En particulier, $D^0 \mathrm{Lie}\, V_\omega = \mathrm{Lie}\, V_\omega$.

Transportons à V_ω l'action "D-degré" ρ_D de $\mathbb{G}_m$ sur $(\prod, \circ)$. Cette action gradue $\mathrm{Lie}(V_\omega)$, son algèbre enveloppante universelle complétée et l'algèbre affine $\mathcal{O}(V_\omega)$. Les filtrations correspondantes coïncident avec celles définie par la filtration D de $\mathrm{Lie}\, V_\omega$ par les $D^p \mathrm{Lie}\, V_\omega$. Il en résulte que l'isomorphisme de schémas de V_ω avec $\prod$ induit un isomorphisme de $V_\omega / D^p V_\omega$ avec $\prod / D^p \prod$, les algèbres affines des quotients étant dans les deux cas les sous-algèbres engendrées par D^{-p} des algèbres affines (A.10). Plus précisément, l'action de V_ω sur $\prod_{10}$ fait de $\prod_{10}$ un espace principal homogène sous V_ω, trivialisé par 1_{10} fixe sous ρ_D, et induit une action principale homogène de $V_\omega / D^p V_\omega$ sur $\prod_{10} / D^p$. Indépendamment du foncteur fibre, il reste vrai que l'action de V sur $P_{0,0}$ et $P_{1,0}$ induit une action de $V/D^p V$ sur $P_{0,0}/D^p$ et $P_{1,0}/D^p$, et que $P_{1,0}/D^p$ est un espace principal homogène sous $V/D^p V$.

Proposition 6.6. *Le morphisme (5.11.2) de U dans V se factorise par D^1V.*

Le quotient D^1V/D^2V étant abélien, ce morphisme induit donc

$$U^{\mathrm{ab}} \to D^1V/D^2V. \tag{6.6.1}$$

Preuve. D'après 6.5, il suffit de vérifier que U agit trivialement sur $P_{1,0}/D^1$, le $\mathbb{Q}(1)$-torseur des chemins, dans A^*, de 1_0 à 1. En effet, $P_{\mu,\lambda_0}\,(A^*)$ est canoniquement isomorphe à $P_{\mu,\lambda}(A^*)$, et, faisant $\lambda = \mu$, on voit que $P_{1,0}/D^1$ est le $\mathbb{Q}(1)$-torseur trivial, sur lequel U agit trivialement.

6.7. Nous nous proposons de montrer que (6.6.1) est injectif et de calculer son image. Noter que l'action de U sur U^{ab}, ainsi que l'action de U sur D^1V/D^2V (déduite de l'action intérieure de V sur lui-même), sont triviales. Les deux membres de (6.6.1) sont donc des produits de schémas en groupe vectoriels $\mathbb{Q}(n)$, et le passage à la réalisation ω ne perd aucune information.

En réalisation ω, le noyau $D^1\mathfrak{L}$ de $\mathrm{Lib}(e_0, (e_\zeta)) \to \mathrm{Lib}(e_0)$: $e_0 \mapsto e_0$, $e_\zeta \mapsto 0$, est, pour le crochet $[\ \ ]$, l'algèbre de Lie libre engendrée par les $(\mathrm{ad}\, e_0)^n(e_\zeta)$ $(n \geq 0,\ \zeta \in \mu_N)$, de D-degré 1. Le quotient $D^1\mathfrak{L}/D^2\mathfrak{L}$ a donc pour base les images des $(\mathrm{ad}\, e_0)^n(e_\zeta)$, $\mathrm{ad}\, e_0$ étant pris au sens du crochet $[\ ,\ ]$.

Notons $\mathcal{E}^n$ la composante de poids $-2n$ de $D^1\mathfrak{L}/D^2\mathfrak{L}$, de base les images des $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\zeta)$. Le quotient $\mathrm{Gr}^1_D(\mathfrak{L}^\wedge)$ est le produit des $\mathcal{E}^n$. Quand n sera fixé, nous écrirons simplement $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}^n$, et E_ζ pour la base des $(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\zeta)$.

Fixons un plongement complexe σ de k. L'élément $\mathrm{dch}(\sigma)$ de $V_\omega(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \ll e_0, (e_\zeta) \gg$ a un coefficient de e_0 nul (5.17). Il est donc dans $D^1V_\omega(\mathbb{C})$. Calculons sa projection dans D^1V_ω/D^2V_ω, d'algèbre de Lie $D^1\mathfrak{L}^\wedge/D^2\mathfrak{L}^\wedge$. Pour

$$x = \sum \lambda_{n,\zeta}(\mathrm{ad} e_0)^{n-1}(e_\zeta) + \text{termes de } D\text{-degré } \geq 2,$$

l'exponentielle de x dans $V_\omega = \prod$ est donnée par 5.15. On a

$$\exp(x) = 1 + x + \text{termes de } D\text{-degré } \geq 2,$$

et $\lambda_{n,\zeta}$ est donc le coefficient de $e_0^{n-1}e_\zeta$ dans x.

D'après 5.17, la projection de $\mathrm{dch}(\sigma)$ dans D^1V_ω/D^2V_ω est donc l'exponentielle de l'élément

$$\mathrm{dch}^1(\sigma) = \sum_{n,\zeta}\Big(\sum_m \frac{\sigma(\zeta^{-m})}{m^n}\Big)(\mathrm{ad}\, e_0)^{n-1}(e_\zeta)$$

de son algèbre de Lie $\prod \mathcal{E}^n$. Pour $n=1$, $\zeta=1$, la somme sur m diverge et est à remplacer par 0.

Identifions U^{ab} et D^1V/D^2V à leurs algèbres de Lie par l'application exponentielle et projetons sur U^{ab} et D^1V/D^2V. On obtient qu'il existe a_σ dans $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}}\widehat{\otimes}\mathbb{C}$ vérifiant

$$\text{(6.7.1)}\qquad \begin{aligned}&\text{Image de } a_\sigma \text{ dans } \Big(\mathrm{Lie}\, D^1V_\omega/D^2V_\omega = \prod \mathcal{E}^n\Big)\widehat{\otimes}\mathbb{C}\\ &= \mathrm{dch}^1(\sigma) + \text{ élément de } \prod (2\pi i)^n\mathcal{E}^n.\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{I}$ l'image de Lie U_ω dans Lie V_ω. La filtration D de Lie V induit une filtration D de $\mathcal{I}$. On prendra garde que l'action "D-degré" de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathrm{Lie}\, V_\omega$ n'a aucune raison de respecter $\mathcal{I}$ (et en fait ne respecte pas $\mathcal{I}$).

Théorème 6.8. (i) *Le morphisme (6.6.1) est injectif; il induit donc un isomorphisme de $\mathfrak{u}_\omega^{\mathrm{ab}}$ avec $\mathcal{I}/D^2\mathcal{I}$.*

(ii) *En réalisation ω et en poids $-2n$, l'image dans $\mathcal{E} := \mathcal{E}^n$ de $\omega_n(\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}})$ est le sous-espace $\mathcal{E}^+_{\mathrm{distr}}$ des $\sum x_\zeta E_\zeta$ vérifiant la relation de parité*

$$\text{(6.8.1)}\qquad x_{\zeta^{-1}} = (-1)^{n-1}x_\zeta$$

et la relation de distribution de poids $n-1$ (resp. de distribution trouée si $n=1$): si $N = Md$ avec $d \geq 1$ et que $\eta^M = 1$, on a

$$\text{(6.8.2)}\qquad x_\eta = \frac{1}{d^{n-1}}\sum_{\zeta^d=\eta} x_\zeta$$

(resp. $x_1 = 0$ et (6.8.2) seulement pour $\eta \neq 1$ si $n=1$).

Remarque 6.9 (i)**.** La relation de parité (6.8.1) est la relation (6.8.2) pour $d=-1$.

(ii) Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathcal{E}^+_{\mathrm{distr}}$ est muni de formes linéaires $x \mapsto x_\zeta$ vérifiant les relations de parité et de distribution de 6.8 (ii), et est universel pour cette propriété. Son dual $\mathcal{D}^+_{\mathrm{distr}}$ est muni d'une application $\mu_N \to \mathcal{D}^+_{\mathrm{distr}}$ vérifiant les mêmes identités, et est universel pour cette propriété: c'est l'espace dans lequel prend ses valeurs la distribution de poids $n-1$ (resp. trouée si $n=1$) de parité $(-1)^{n-1}$ universelle.

6.10 Preuve de 6.8. Pour σ un plongement complexe de k, posons

$$d_\sigma := \sum_\zeta \sum_m \frac{\sigma(\zeta^{-m})}{m^n} E_\zeta. \tag{6.10.1}$$

Pour $n=1$, le coefficient, divergent, de E_1 est à remplacer par zéro.

D'après 6.7.1, il existe a_σ dans l'image de $\omega_n(\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}})$ tel que

$$d_\sigma \equiv a_\sigma \pmod{(2\pi i)^n \mathcal{E}}. \tag{6.10.2}$$

Cas $n=1$. Fixons σ et identifions k à son image dans $\mathbb{C}$ par σ. En particulier, écrivons ζ pour $\sigma\zeta$. Avec cette notation, (6.10.1) se récrit

$$(d_\sigma)_\zeta = -\log(1-\zeta).$$

Soient k^+ le sous-corps totalement réel de k fixe sous par la conjugaison complexe, et $\mathcal{O}^+$ l'anneau de ses entiers. Les groupes d'unités $\mathcal{O}^{+*}$ et $\mathcal{O}^*$ ont le même rang. On a donc $\mathcal{O}^{+*} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^* \otimes \mathbb{Q}$ et Γ est encore la somme directe de $\mathcal{O}^{+*} \otimes \mathbb{Q}$ et du sous-espace vectoriel de k^{+*} engendré par les diviseurs premier de N. Puisque σ induit une place réelle de k^+, $x \mapsto \log|x|$ induit une injection de $k^{+*} \otimes \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, et l'application induite par $x \mapsto \log|x|$ de $k^* \otimes \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est injective sur Γ.

D'après (2.3.1), $\omega_n(\mathfrak{u}^{\mathrm{ab}})$ est le dual de Γ. Soit $\mathcal{F}$ son image dans $\mathcal{E}$. Puisque a_σ est dans $\mathcal{F}_\mathbb{C}$, sa partie réelle est dans $\mathcal{F}_\mathbb{R}$. Prenant la partie réelle de (6.10.2), on obtient que $-\sum \log|1-\zeta|\, E_\zeta$ est dans $\mathcal{F}_\mathbb{R}$.

D'après un théorème de Bass (1966) (cf. Washington (1997) 8.9 et 12.18), Γ, muni de $\zeta \mapsto 1-\zeta$ (resp. 1 si $\zeta = 1$) est la distribution trouée paire universelle sur μ_N et il n'y a donc d'autres relations linéaires rationnelles entre les $\log|1-\zeta|$ que celles déduites de (6.8.1) et (6.8.2). L'image $\mathcal{F}$ contient donc $\mathcal{E}^+_{\text{distr}}$. Puisque $\mathcal{E}^+_{\text{distr}}$ a le même rang que Γ, (i) et (ii) en résultent.

Cas $n > 1$. Soit $\mathcal{F}$ l'image de $\omega_n * (\mathfrak{u}^{\text{ab}})$ dans $\mathcal{E}$. Prenant, selon la parité de n, la partie réelle ou la partie imaginaire de (6.10.2), on obtient que pour tout σ

$$d_\sigma + (-1)^{n-1}\bar{d}_\sigma$$

est dans $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$. Il résulte de (6.10.1) et des identités

$$\sum_{\zeta^d=\eta} \zeta^m = \begin{cases} 0 & \text{si } d \nmid m \\ d\eta^{m/d} & \text{si } d \mid m \end{cases}$$

$$\zeta^{-1} = \bar{\zeta}$$

que les $d_\sigma + (-1)^{n-1}\bar{d}_\sigma$ sont dans $(\mathcal{E}^+_{\text{distr}})_{\mathbb{C}}$.

Lemme 6.11. *Le sous-espace W de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ engendré par les $d_\sigma \pm (-1)^{n-1}\bar{d}_\sigma$ est de dimension au moins égale au nombre de caractères de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ de parité $(-1)^{n-1}$.*

Déduisons 6.8 de 6.11. La borne inférieure 6.11 pour la dimension de W coïncide tant avec la dimension de $\omega(\mathfrak{u}^{\text{ab}})_n$ (2.3.1) qu'avec la dimension de $\mathcal{E}^+_{\text{distr}}$ (Kubert (1979) App.). Puisque W est contenu dans l'image complexifiée $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$, W est égal à cette image, (6.1.1) est injectif. De même, puisque S est contenu dans $(\mathcal{E}^+_{\text{distr}})_{\mathbb{C}}$, on a égalité, prouvant 6.8.

Preuve de 6.11. On peut supposer que $k = \mathbb{Q}(\exp(2\pi i/N)) \subset \mathbb{C}$. On identifie l'ensemble des plongements complexes de k à $(\mathbb{Z}/N)^*$ par $\zeta \mapsto \zeta^a$, et μ_N à $\mathbb{Z}/N$ par $b \mapsto \exp(2\pi i\, b/N)$. Avec ces notations, W est l'image de l'application

$$F\colon \mathbb{C}^{(\mathbb{Z}/N)^*} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N}$$

de matrice

$$\sum_m \frac{\exp(-2\pi i\, abm)}{m^n} + (-1)^{n-1}\frac{\exp(-2\pi i\, abm)}{m^n} .$$

Il nous faut minorer le rang de F. Il sera plus commode de considérer l'application transposée ${}^tF$. Les applications F et ${}^tF$ sont équivariantes, pour les actions $e_x \mapsto e_{ax}^{-1}$ et $e_x \mapsto e_{ax}$ de $(\mathbb{Z}/N)^*$ sur les deux membres, et il suffit de vérifier que pour tout caractère χ de $(\mathbb{Z}/N)^*$ de parité $(-1)^{n-1}$, la χ-partie de ${}^tF$ est non nulle. Soient M le diviseur de N tel que χ provienne d'un caractère primitif χ_0 de $(\mathbb{Z}/M)^*$, et prolongeant χ_0 par 0 sur $\mathbb{Z}/M$. Vérifions que l'image par ${}^tF$ du vecteur $(\chi_0(b))_{b\in\mathbb{Z}/N}$ est non nulle. Prenant la composante $a = 1$, on se ramène à vérifier que

$$\sum_{b,m} \frac{\exp(2\pi i\, bm).\chi_0(b)}{m^n} \neq 0$$

C'est en effet N/M fois le produit de la somme de Gauß $\sum \exp(2\pi i\, b)\chi_0(b)$ (somme sur $(\mathbb{Z}/M)^*$) par $L(\chi_0, n)$.

Remarque 6.12. L'argument utilisé pour $n > 1$, utilisant tous les plongements complexes et (6.10.2) modulo $(2\pi i)^n \mathcal{E} \otimes \mathbb{R}$ plutôt qu'un seul plongement et (6.10.2) modulo $2\pi i\mathcal{E}$, s'applique aussi pour $n = 1$ si N n'a qu'un seul facteur premier. Dans ce cas en effet, l'application régulateur de $\mathcal{O}_N^*[1/N]$ dans $\mathbb{R}^m$, m le nombre de places à l'infini, a un noyau fini et une image discrète.

Remarque 6.13. Combinant les résultats de cet article avec ceux de Goncharov (2001), on obtient immédiatement l'analogue motivique de résultats de loc. cit. sur les algèbres de Lie de Galois: remplacer systématiquement l'algèbre de Lie de Galois g_N^ℓ par $\mathrm{Im}(\mathrm{Lie}\, U_\omega \to \mathrm{Lie}\, V_\omega)$ (voir 10.5.3) qui est son analogue motivique, et travailler sur $\mathbb{Q}$ plutôt que $\mathbb{Q}_\ell$.

Appendice. Rappels sur les groupes algébriques unipotents.

Dans tout cet appendice, nous supposons être en caractéristique zéro.

A.1. En caractéristique zéro, le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt peut être énoncé comme suit. Pour $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie sur K, soit $\varphi_n\colon \mathrm{Sym}^n\mathfrak{L} \to \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ le produit symétrisé, de la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{L}$ dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{L}$. Pour x dans $\mathfrak{L}$, il envoie l'élément x^n de $\mathrm{Sym}^n\mathfrak{L}$ sur l'élément x^n de $\mathfrak{U}\mathfrak{L}$. Le morphisme d'espaces vectoriels

$$\varphi_*\colon \mathrm{Sym}^*\mathfrak{L} \to \mathfrak{U}\,\mathfrak{L} \tag{A.1.1}$$

est un isomorphisme de cogèbres. Il transforme la filtration croissante de $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{L}$ par les $\bigoplus_{n\le p} \mathrm{Sym}^n\mathfrak{L}$ en la filtration de $\mathfrak{U}\mathfrak{L}$ par les images des $\bigoplus_{n\le p} \otimes^n\mathfrak{L}$.

Sous cette forme, le théorème est valable dans toute catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire karoubienne (3.9) qui admet des sommes dénombrables munie d'un produit tensoriel biadditif, associatif, commutatif et à unité. Voir P. Deligne and J. Morgan (1999) 1.3.7. Le cas qui nous intéresse est celui des espaces vectoriels filtrés. Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie munie d'une filtration décroissante F. La filtration correspondante de $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}$ est caractérisée par la propriété qu'une filtration sur un $\mathfrak{L}$-module M est compatible à la filtration de $\mathfrak{L}$ si et seulement si elle l'est à celle de $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}$. La version catégorique de Poincaré-Birkhoff-Witt implique la compatibilité de (A.1.1) aux filtrations.

Une filtration F sur un $\mathfrak{L}$-module M est compatible à la filtration centrale descendante $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{L}$, si et seulement si les F^pM sont des sous-modules et que $\mathfrak{L}$ agit trivialement sur les $\mathrm{Gr}^p_F M$. La filtration de $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}$ induite par la filtration $\mathfrak{Z}$ de $\mathfrak{L}$ est donc la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation I. Par compatibilité de (A.1.1) aux filtrations, on a

Corollaire A.2. *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}$, de série centrale descendante $\mathfrak{Z}$, est nilpotente de classe c ($\mathfrak{Z}^{c+1} = 0$), alors, si on identifie $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}$ par (A.1.1), on a*

$$I^n \supset \bigoplus_{p\ge n} \mathrm{Sym}^p\mathfrak{L} \supset I^{nc}. \tag{A.2.1}$$

Notons $\mathfrak{U}^\wedge\mathfrak{L}$ le complété I-adique de $\mathfrak{U}\,\mathfrak{L}$.

Corollaire A.3. *Si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est nilpotente, l'isomorphisme (A.1.1) induit par complétion un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\prod_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n \mathcal{L} \to \mathcal{U}^{\wedge} \mathcal{L}. \tag{A.3.1}$$

L'isomorphisme (A.3.1) est compatible aux topologies des deux membres. A gauche, la topologie est la topologie produit (d'espaces discrets). A droite, celle de limite projective des espaces discrets $\mathcal{U}\,\mathcal{L}/I^n$.

A.4. Le foncteur "algèbre de Lie" est une équivalence de la catégorie des groupes algébriques unipotents avec celle des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie. L'équivalence inverse sera notée exp. De plus, le foncteur $\rho \mapsto d\rho$ est une équivalence de la catégorie des représentations linéaires (de dimension finie) de V, supposé unipotent, avec celle des représentations nilpotentes de son algèbre de Lie $\mathbf{v}$.

On dispose d'une application exponentielle

$$\exp\colon \mathbf{v} \to V \tag{A.4.1}$$

du schéma vectoriel $\mathbf{v}$ dans V. Elle est caractérisée par la propriété que pour toute représentation linéaire ρ de V, on ait

$$\rho(\exp(x)) = \exp(d\rho(x)). \tag{A.4.2}$$

C'est un isomorphisme de $\mathbf{v}$, muni de la loi de groupe de Campbell-Hausdorff, avec V.

A.5. Soit V un groupe algébrique unipotent d'algèbre de Lie $\mathbf{v}$. L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathbf{v}$ est l'algèbre des opérateurs différentiels sur V invariants par translations à gauche. Comme cogèbre, c'est le dual topologique du complété de l'anneau local de V en 1. L'application exponentielle (A.4.1) induit un isomorphisme de la cogèbre $\mathcal{U}\mathbf{v}$ avec la cogèbre $\mathrm{Sym}^*\mathbf{v}$ des opérateurs différentiels en 0 sur l'espace affine $\mathbf{v}$.

Par réduction au cas où $\mathbf{v}$ est de dimension un, on vérifie que cet isomorphisme envoie $x^n \in \mathrm{Sym}^n\mathbf{v}$ sur $x^n \in \mathcal{U}\mathbf{v}$. C'est donc l'isomorphisme (A.1.1). Pour l'espace affine $\mathbf{v}$, l'algèbre affine de $\mathbf{v}$ est le dual topologique de la cogèbre complétée $\prod_{n>0} \mathrm{Sym}^n\mathbf{v}$. Appliquant A3, on obtient:

Proposition A.6. *L'algèbre affine de V est le dual topologique de la cogèbre $\mathcal{U}\mathbf{v}$, complétée pour la topologie I-adique.*

Dualement, le dual (muni de la topologie faible) de l'algèbre affine de V est $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$. Les points de V à valeurs dans une algèbre A (homomorphismes de l'algèbre affine dans A) sont les *éléments groupaux* g de $A\widehat{\otimes}\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$: les éléments d'augmentation 1 tels que $\Delta g = g\otimes g$. Compatibilités: l'application exponentielle (A.4.1) est l'exponentielle, de $A\otimes g$ dans $V(A) \subset A\widehat{\otimes}\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$. La loi de groupe est le produit dans $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$.

A.7. Un schéma en groupe affine G est la limite projective de ses quotients G_α qui sont des groupes algébriques. Il y a lieu de définir son algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G)$ comme étant la pro-algèbre de Lie limite projective des $\mathrm{Lie}(G_\alpha)$. De façon équivalente, c'est la limite projective des $\mathrm{Lie}(G_\alpha)$, qui sont de dimension finie, munie de sa topologie de limite projective d'espaces discrets. C'est le dual de la limite inductive $\mathrm{colim}(\mathrm{Lie}(G_\alpha)^\vee)$, muni de sa topologie faible.

A.8. Un schéma en groupe affine G est *pro-unipotent* s'il est limite projective de groupes algébriques unipotents, i.e. si les G_α de A.7 sont unipotents. On définit l'algèbre enveloppante complétée $\mathcal{U}^\wedge\mathrm{Lie}(G)$ de $\mathrm{Lie}(G)$ par

$$\mathcal{U}^\wedge \mathrm{Lie}\, G = \lim_\alpha \mathcal{U}^\wedge \mathrm{Lie}(G_\alpha) = \lim_{\alpha,n} \mathcal{U}(\mathrm{Lie}(G_\alpha))/I^n,$$

cette limite étant munie de sa topologie de limite projective. Avec ces définitions, A.6 reste valable, comme on le vérifie par passage aux limites.

A.9. Cas particulier. Soit $\mathrm{Lib}((x_i)_{i\in I})$ l'algèbre de Lie libre sur K engendrée par une famille finie de générateurs x_i. Notons-la simplement Lib. Son algèbre enveloppante est l'algèbre associative libre $K\,\langle (x_i)_{i\in I}\rangle$.

Soit $\mathrm{Lib}^\wedge$ le complété de Lib pour la filtration centrale descendante. C'est l'algèbre de Lie du schéma en groupe pro-unipotent

$$\exp(\mathrm{Lib}^\wedge) = \lim \exp(\mathrm{Lib}/\mathfrak{Z}^n).$$

Son algèbre enveloppante complétée est l'algèbre des séries formelles associatives $K\langle\langle (x_i)\rangle\rangle$. Les points de $\exp(\mathrm{Lib}^\wedge)$ à valeurs dans une K-algèbre A sont les éléments groupaux g de $A\langle\langle (x_i)\rangle\rangle$: terme constant 1 et $\Delta g = g \otimes g$, Δ étant le coproduit $A\langle\langle (x_i)\rangle\rangle \to A\langle\langle (x_i)\rangle\rangle \widehat{\otimes} A\langle\langle (x_i)\rangle\rangle$ tel que $\Delta x_i = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$.

A.10. Soient V un groupe algébrique unipotent, et D une filtration décroissante finie de son algèbre de Lie $\mathbf{v}$, telle que $D^0(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. On notera encore D la filtration de V par les sous-groupes d'algèbres de Lie les $D^p\mathbf{v}$. Puisque $[D^p\mathbf{v}, D^q\mathbf{v}] \subset D^{p+q}\mathbf{v}$, ce sont des sous-groupes distingués, et pour $p \geq 1$, $D^pV/D^{p+1}V$ est abélien.

On notera encore D les filtrations induites sur $\mathcal{U}\mathbf{v}$, $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$ et son dual $\mathcal{O}(V)$. La filtration $n \mapsto D^{-n}\mathcal{O}(V)$ de $\mathcal{O}(V)$ est croissante, et $D^1\mathcal{O}(V) = 0$.

Par A.1, l'application exponentielle $\exp\colon \mathbf{v} \to V$ respecte les filtrations D des algèbres affines. Par réduction au cas linéaire, on en déduit que l'algèbre affine de $V/D^{n+1}V$ est la sous-algèbre de $\mathcal{O}(V)$ engendrée par $D^{-n}\mathcal{O}(V)$. En particulier, $D^0\mathcal{O}(V)$ est l'algèbre affine de V/D^1V.

Si M est une représentation de V, les conditions suivantes sur une filtration F de M sont équivalentes:

_ compatiblité à D sur $\mathbf{v}$: $D^p\mathbf{v} \otimes F^qM \to F^{p+q}M$,

_ compatibilité à D sur $\mathcal{U}\mathbf{v}$: $D^p\mathcal{U}\mathbf{v} \otimes F^qM \to F^{p+q}M$,

_ compatibilité à D sur $\mathcal{O}(V)$: $F^pM \to \sum D^{-r}\mathcal{O}(V) \otimes F^{p+r}M$

La filtration D de $\mathcal{O}(V)$ est stable par translations à gauche et à droite. Si P est un V-torseur, elle fournit encore une filtration D sur l'algèbre affine $\mathcal{O}(P)$ de P.

A.11 Fonctorialités. (i) Soient $\mathbf{v}_1$ une sous-algèbre de Lie de $\mathbf{v}$ (resp. un quotient) et V_1 le sous-groupe (resp. quotient) correspondant de V. Notons D_1 la filtration de $\mathbf{v}_1$ induite par (resp. quotient de) la filtration D de $\mathbf{v}$, et les filtrations qui s'en déduisent sur $\mathrm{Sym}^*\mathbf{v}_1$, $\mathcal{U}\mathbf{v}_1$, $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}_1$ et $\mathcal{O}(V_1)$. La puissance symmétrique $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{v}_1)$ est un sous-espace (resp. quotient) de $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{v})$, et sa filtration D_1 est induite par (resp. quotient de) la filtration D de $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{v})$. Il résulte de A.1 que la même assertion vaut pour $\mathcal{U}v_1$ et $\mathcal{U}^\wedge v_1$ et que dualement, la filtration D_1 du quotient (resp. sous-espace) $\mathcal{O}(V_1)$ de $\mathcal{O}(V)$ est quotient de (resp. induite par) la filtration D de $\mathcal{O}(V)$.

(ii) Supposons que la filtration D de $\mathbf{v}$ provienne d'une graduation $\mathbf{v} = \underset{n\geq 0}{\oplus} \mathbf{v}_n$. Cette graduation se propage à $\mathrm{Sym}^*(\mathbf{v})$, $\mathcal{U}\mathbf{v}$, $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$ et $\mathcal{O}(V)$. Pour $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$, "graduation" est à prendre au sens de "décomposition en produit" plutôt que "décomposition en somme". La filtration D de $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{v})$ provient de la graduation de $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{v})$. Par A.1, la même assertion vaut pour $\mathcal{U}\mathbf{v}$, $\mathcal{U}^\wedge\mathbf{v}$ et $\mathcal{O}(V)$.

(iii) Par passage à la limite, A.10 et A.11 restent valable dans le cas pro-unipotent.

A.12 Exemples. (i) Prenons l'algèbre de Lie pro-unipotente $\mathrm{Lib}^\wedge$ de A.9, et la filtration centrale descendante $\mathfrak{Z}$. Elle provient de la graduation pour laquelle les x_i sont de degré 1. Chaque monôme m en les x_i définit sur $\exp(\mathrm{Lib}^\wedge) \subset K\langle\langle(x_i)\rangle\rangle$ une fonction c_m "coefficient de m dans g", et l'algèbre affine a pour base les c_m. Le produit est le produit de mélange. Le degré de c_m est l'opposé de celui de m.

(ii) Parmi les générateurs x_i, distinguons en un, noté x_0, et posons $I = \{0\} \amalg J$. On a

$$\mathrm{Lib} := \mathrm{Lib}((x_i)_{i\in I}) = K.x_0 \ltimes \mathrm{Lib}((\mathrm{ad}\, x_0)^n(x_j),\ (n\geq 0,\ j\in J)).$$

Soit D la filtration de Lib pour laquelle D^p est, pour $p\geq 1$, la série centrale descendante du second facteur. La filtration D provient de la graduation pour laquelle x_0 est de degré 0 et les x_j $(j\in J)$ de degré 1. Complétant cette filtration, on obtient une filtration, encore notée D, de $\mathrm{Lib}^\wedge$. La filtration correspondante de l'algèbre affine $\mathcal{O}(\exp(\mathrm{Lib}^\wedge))$ est déduite de la graduation pour laquelle le degré de c_m est l'opposé du degré du monôme m en les x_j $(j\in J)$.

A.13. Soit G un groupe algébrique produit semi-direct du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ par un groupe algébrique unipotent V, d'algèbre de Lie $\mathbf{v}$. L'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbf{v}$ gradue cette algèbre de Lie; sur $\mathbf{v}_n$, $\lambda\in\mathbb{G}_m$ agit par multiplication par λ^n.

Supposons $\mathbf{v}$ à degrés > 0. Le foncteur $\rho\mapsto d\rho$ est alors une équivalence de la catégorie des représentations linéaires de G avec celle des espaces vectoriels gradués E, muni d'une action compatible aux graduations de l'algèbre de Lie $\mathbf{v}$. La graduation de E donne l'action de $\mathbb{G}_m$ et l'action de $\mathbf{v}$, automatiquement nilpotente, donne celle de V.

Notons $K(a)$ l'espace vectoriel K placé en degré a. Pour $a < b$, une extension de $K(a)$ par $K(b)$ dans la catégorie des représentations de G est donnée par un homomorphisme $\mathbf{v} \to \mathrm{Hom}(K(a), K(b))$, i.e. par un élément du dual de la partie homogène de degreé $b - a$ de $\mathbf{v}^{\mathrm{ab}} := \mathbf{v}/[\mathbf{v}, \mathbf{v}]$:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(G)}(K(a), K(b)) = (\mathbf{v}^{\mathrm{ab}})_{b-a}{}^{\vee}. \tag{A.13.1}$$

A.14. Soit G un schéma en groupes produit semi-direct de $\mathbb{G}_m$ par V pro-unipotent. Ecrivons-le comme limite projective de quotients par des sous-groupes distingués contenus dans V:

$$G = \mathbb{G}_m \ltimes V = \lim \mathbb{G}_m \ltimes V_\alpha.$$

Supposons les algèbres de Lie graduées $\mathbf{v}_\alpha$ des V_α (A.13) à degré > 0. Passant à la limite, on déduit de (A.13.1) que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(G)}(k(a), k(b)) = \mathrm{colim}(v_\alpha^{\mathrm{ab}})_{b-a}{}^{\vee}. \tag{A.14.1}$$

Supposons en outre que pour tout,

$$\dim \mathrm{Ext}^1(k(0), k(n)) < \infty.$$

Les limites projectives (A.14.1) sont alors stationnaires et, puisque si on relève dans les $(\mathbf{v}_\alpha)_n$ des bases des $(\mathbf{v}_\alpha^{\mathrm{ab}})_n$, on obtient un système générateur de $\mathbf{v}_\alpha$, la dimension de $(\mathbf{v}_\alpha)_n$ est, pour chaque n, bornée indépendamment de n. On notera $\mathbf{v}_{\mathrm{gr}}$ l'algèbre de Lie graduée de composantes homogènes les limites projectives (stationnaires) des composantes homogènes des v_α. Passant à la limite dans A.13, on obtient:

Proposition A.15. *Sous les hypothèses de A.14: $G = \mathbb{G}_m \ltimes V$, Lie V à degrés > 0, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(G)}(k(0), k(n))$ de dimension finie, le foncteur $\rho \mapsto d\rho$ est une équivalence de la catégorie des représentations de G avec celle des espaces vectoriels gradués munis d'une action de l'algèbre de Lie graduée $\mathbf{v}_{\mathrm{gr}}$. On a*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(G)}(k(0), k(n)) = (\mathbf{v}_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{ab}})_n^{\vee}.$$

Bibliographie

H. Bass. *Generators and relations for cyclotomic units*, Nagoya Math. J. **27** (1966), p. 401–407.

A. Beilinson. *Higher regulators and values of L-functions*; Sovremennye Problemy Matematiki **24**, Moscow (1984) p. 181–238 (en russe).

A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne « *faisceaux pervers* » in: analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque 100, SMF (1982).

S. Bloch. *Algebraic cycles and algebraic K-theory*, Adv. in Math. **61**, 3 (1986), p. 267–304.

________ . *The moving lemma for higher Chow groups*, J. Alg. Geom. **3**, 3 (1994), p. 537–568.

A. Borel. *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. ENS **7** (1974), p. 235–272.

________ . *Cohomologie de* SL_n *et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*. Ann. Scuola Normale Superiore **4** (1977), p. 613–636.

A. Buchsbaum, *Satellites and exact functors*, Ann. of Math. **71** 2 (1960), p. 199–209.

K. T. Chen. *Iterated integrals of differential forms and loop space homology*, Ann. of Math. **97** (1973), p. 217–246.

________ . *Reduced Bar Constructions on de Rham complexes*, in: Algebra, Topology and Category Theory, a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg, p. 19–32, Academic Press (1976).

P. Deligne. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points* in: Galois group over $\mathbb{Q}$, MSRI Publ. 16, p. 79–313, Springer Verlag (1989).

________ . *Catégories tannakiennes* in: Grothendieck Festschrift vol. 2, p. 111–195. Progress in Math. 87, Birkhäuser (1990).

P. Deligne and J. Morgan, *Notes on supersymmetry*, in: Quantum fields and strings: a course for mathematicians, vol. 1, AMS (1999).

M. Demazure et P. Gabriel. *Groupes algébriques*, Masson (1970).

A. B. Goncharov. *Polylogarithms in arithmetic and geometry*, Proc. ICM Zurich 1994, p. 374–387, Birkhauser.

A. B. Goncharov. *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0,\infty\} \cup \mu_N)$, Duke Math. J. **110** 3 (2001), p. 397–487.

R. Hain and M. Matsumoto. *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of* $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, preprint (2001).

R. Hain and S. Zucker. *Unipotent variations of mixed Hodge structure*, Inv. Math. **88**, (1987) p. 83–124.

M. Hanamura. *Mixed motives and algebraic cycles I.*, Math. Res. Lett. **2**, 6 (1995), p. 811–821. See also II, preprint (1996).

A. Huber. *Mixed Motives and their Realization in Derived Categories*, Lecture Notes in Math. 1604, Springer Verlag (1995).

________ . *Realization of Voevodsky's motives*, J. Alg. Geom. **9** (2000), p. 755–799.

U. Jannsen. *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math. 1400, Springer Verlag (1990).

D. Kubert. *The universal ordinary distribution*, Bull. SMF **107** (1979), p. 179–202.

M. Levine. *Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K-theory*, in: Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, 1991), p. 167–188. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. **407**, Kluwer (1993).

________ . *Bloch's higher Chow groups revisited*, in: K-theory (Strasbourg 1992), p. 235–320, Astérisque 226, SMF (1994).

________ . *Mixed Motives*, Math. Surveys and Monographs **57**, AMS (1998).

G. Racinet. *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*. Publ. Math. IHES **95** (2002), p. 185–231.

M. Rapoport. *Comparison of the regulators of Beilinson and of Borel.* in: Beilinson's conjectures on special values of L-functions, p. 169–192, Perspectives in Math. vol. 4, Acad, Press (1988).

Chr. Reutenauer. *Free Lie algebras*, LMS monographs new ser. **7**, Oxford University Press (1993).

P. Schneider. *Introduction to the Beilinson conjectures.* in: Beilinson's conjectures on special values of L-functions, p. 1–35, Perspectives in math. vol. 4, Acad. press (1988).

T. Terasoma. *Multiple zeta values and mixed Tate motives.* Inv. Math. **149** 2 (2002), p. 339–369.

V. Voevodsky. *Triangulated categories of motives over a field*, in: Cycles, transfer and motivic homology theories, p. 188–238, Ann. of Math. Studies 143, Princeton University Press (2000).

L. C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields – graduate texts in Math.* **81**, Springer Verlag (1997).

Z. Wojtkowiak. *Cosimplicial objects in algebraic geometry*, in Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, 1991), p. 287–327. NATO Adv. Sci. but. Ser. C Math. Phys. **407**, Kluwer (1993).

P. Deligne
School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Princeton, NJ 08540
e-mail: deligne@math.ias.edu

A. B. Goncharov
Department of Mathematics
Brown University
Providence, RI 02912
e-mail: sasha@math.brown.edu